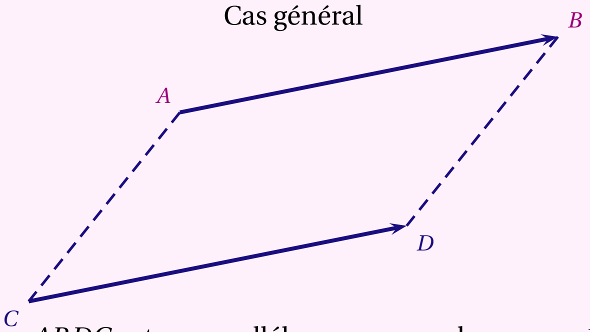
I DÉFINITION D'UN VECTEUR

1 TRANSLATION

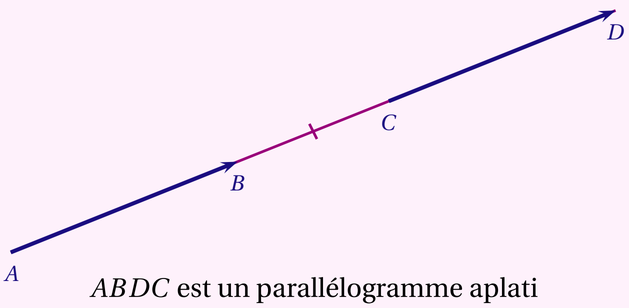
Définition : Soient A et B deux points du plan.
La translation qui transforme A en B associe à tout point C du plan, l'unique point D tel que AB**DC** soit un parallélogramme.
Cette translation est la translation de vecteur $\overrightarrow{AB}$.

Cas général



$ABDC$ est un parallélogramme quelconque

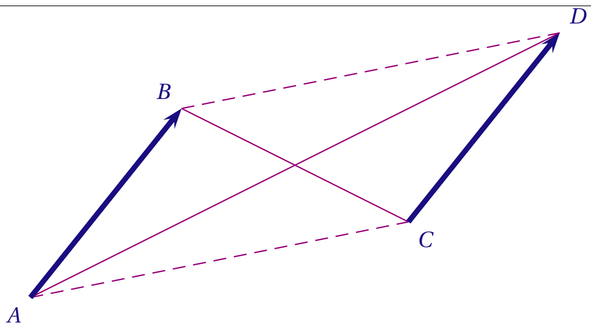
Cas particulier où A, B et C sont alignés



$ABDC$ est un parallélogramme aplati

2 ÉGALITÉ DE DEUX VECTEURS

Définition :
Deux vecteurs sont égaux s'ils sont associés à la même translation.



Propriété :
A, B, C et D sont quatre points du plan.
$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$ si, et seulement si, $ABDC$ est un parallélogramme.

3 REPRÉSENTATION D'UN VECTEUR

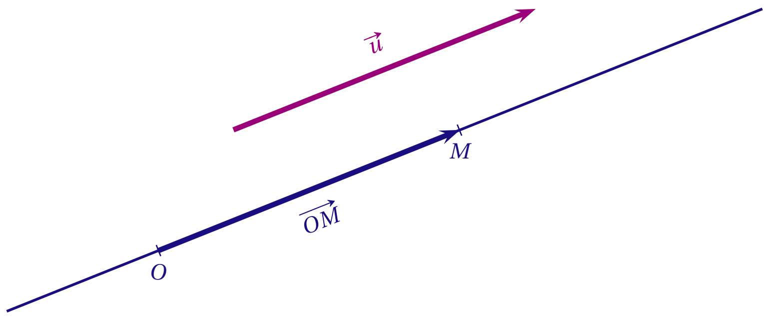
Devant des égalités du type $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC} = \overrightarrow{FE} = \cdots$, on dit que les vecteurs $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{DC}$, $\overrightarrow{FE}$, … sont des représentants du vecteur $\vec{u}$:

$$\vec{u} = \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC} = \overrightarrow{FE} = \cdots$$

Le vecteur $\overrightarrow{AA} = \overrightarrow{BB} = \cdots$ est appelé le vecteur nul, noté $\vec{0}$.

Soit O un point du plan. Pour tout vecteur $\vec{u}$, il existe un un point M unique tel que $\vec{u} = \overrightarrow{OM}$.
Si $\vec{u}$ n'est pas le vecteur nul, les points O et M sont distincts. Le vecteur $\vec{u}$ est caractérisé par :

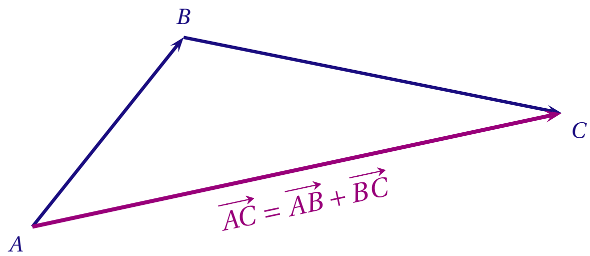
- Sa direction : c'est celle de la droite (OM).
- Son sens : c'est le sens de O vers M.
- Sa norme notée $\|\vec{u}\|$: c'est la distance OM.



II ADDITION VECTORIELLE

1 SOMME DE DEUX VECTEURS

Soit trois points A, B et C.
Si on applique la translation de vecteur $\overrightarrow{AB}$ suivie de la translation de vecteur $\overrightarrow{BC}$, on obtient la translation de vecteur $\overrightarrow{AC}$.
Le vecteur $\overrightarrow{AC}$ est la somme des vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{BC}$



RELATION DE CHASLES

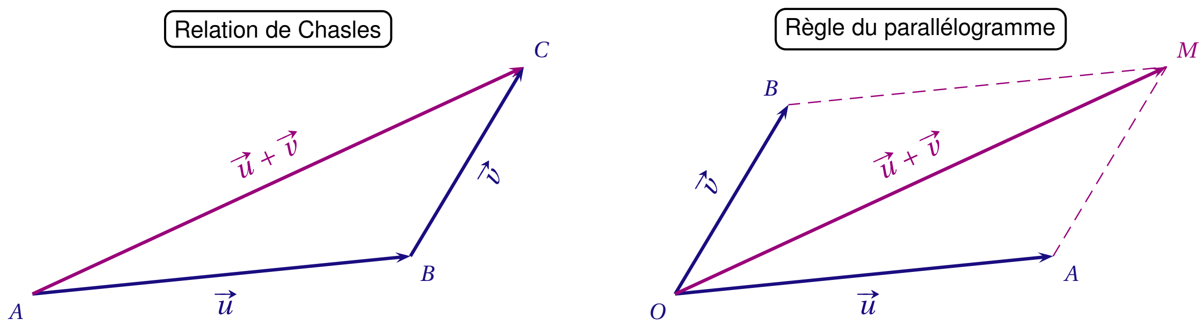
Quels que soient les points A, B et C on a :

$$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$$

RÈGLE DU PARALLÉLOGRAMME

La somme $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}$ est le vecteur $\overrightarrow{OM}$ tel que $OAMB$ est un parallélogramme.

CONSTRUCTION DE LA SOMME DE DEUX VECTEURS



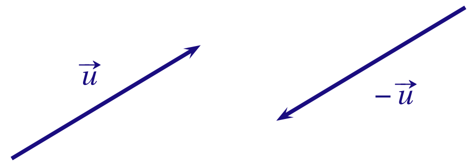
PROPRIÉTÉS ALGÉBRIQUES

Quels que soient les vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$
$\vec{u} + \vec{v} = \vec{v} + \vec{u}$; $\vec{u} + \vec{0} = \vec{0} + \vec{u} = \vec{u}$; $(\vec{u} + \vec{v}) + \vec{w} = \vec{u} + (\vec{u} + \vec{w})$

2 DIFFÉRENCE DE DEUX VECTEURS

OPPOSÉ D'UN VECTEUR

L'opposé d'un vecteur $\vec{u}$ est le vecteur noté $\left(-\vec{u}\right)$ tel que $\vec{u}+\left(-\vec{u}\right)=\vec{0}$.

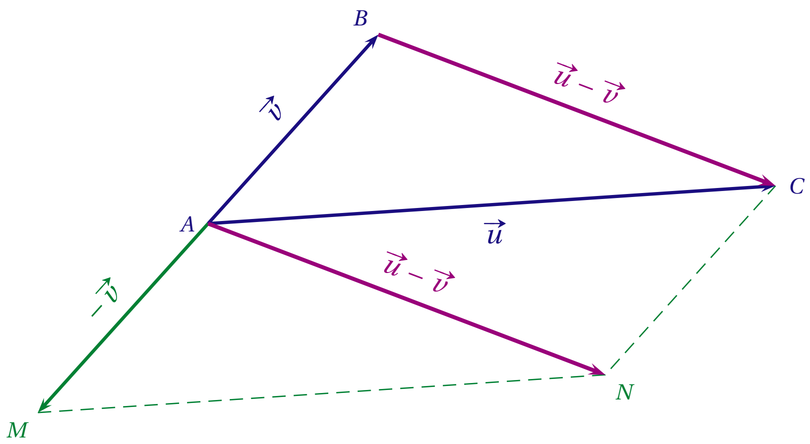


CONSÉQUENCE

L'opposé du vecteur $\overrightarrow{AB}$ est le vecteur $\overrightarrow{BA}$: $-\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{BA}$

DÉFINITION

Étant donné deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ la différence $\vec{u}-\vec{v}$ est le vecteur $\vec{u}+\left(-\vec{v}\right)$.



Quels que soient les points A, B et C, $\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB}$

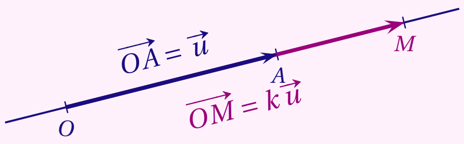
III MULTIPLICATION D'UN VECTEUR PAR UN RÉEL

1 PRODUIT D'UN VECTEUR PAR UN RÉEL k

Définition : Soit $\vec{u}$ un vecteur non nul ($\vec{u} \neq \vec{0}$) et k un réel non nul ($k \neq 0$).
Le produit du vecteur $\vec{u}$ par le réel k, noté $k\vec{u}$ est le vecteur caractérisé par :

— sa direction : $k\vec{u}$ a la même direction que le vecteur $\vec{u}$;

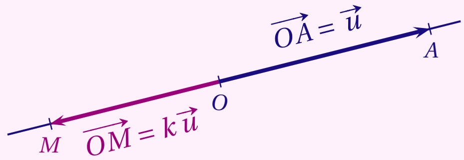
Cas où $k > 0$



- son sens : le vecteur $k\vec{u}$ a le même sens que le vecteur $\vec{u}$;
- sa norme : la norme du vecteur $k\vec{u}$ est égale au produit de la norme du vecteur $\vec{u}$ par le réel k

$$\|k\vec{u}\| = k \times \|\vec{u}\|$$

Cas où $k < 0$



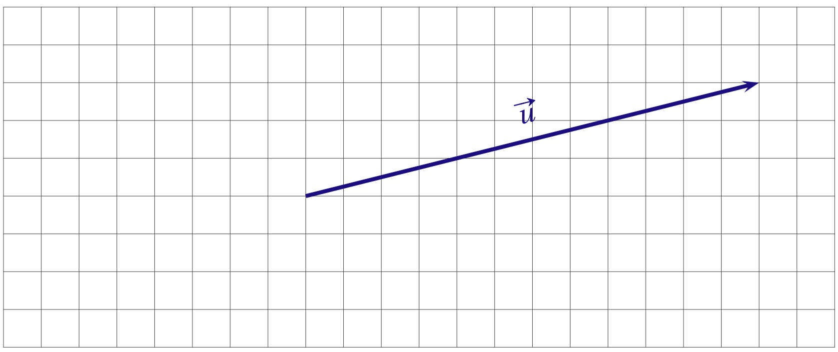
- son sens : le vecteur $k\vec{u}$ est de sens opposé au sens du vecteur $\vec{u}$;
- sa norme : la norme du vecteur $k\vec{u}$ est égale au produit de la norme du vecteur $\vec{u}$ par l'opposé du réel k

$$\|k\vec{u}\| = -k \times \|\vec{u}\|$$

Ce qui s'écrit de façon générale $\|k\vec{u}\| = |k| \times \|\vec{u}\|$ et se lit :
« la norme du vecteur $k\vec{u}$ est égale au produit de la norme du vecteur $\vec{u}$ par la valeur absolue du réel k »

Application :

Dans la situation ci-dessous, représenter graphiquement un représentant de : $-\dfrac{2}{3}\vec{u}$ et de $\dfrac{5}{4}\vec{u}$



2 PROPRIÉTÉS ALGÉBRIQUES

Pour tous vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ et pour tous réels k et k' :
$k\left(\vec{u} + \vec{v}\right) = k\vec{u} + k\vec{v}$; $(k + k')\vec{u} = k\vec{u} + k'\vec{u}$; $k\vec{u} = \vec{0} \iff k = 0$ ou $\vec{u} = \vec{0}$

3 VECTEURS COLINÉAIRES

DÉFINITION

Deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont dits colinéaires s'il existe un réel k tel que $\vec{u} = k\vec{v}$ ou $\vec{v} = k\vec{u}$

REMARQUES

Deux vecteurs non nuls sont colinéaires si, et seulement si, ils ont la même direction.

4 APPLICATIONS GÉOMÉTRIQUES

AVEC LES MILIEUX

Étant donné un segment $[AB]$. Chacune des propriétés suivantes caractérise le milieu I du segment $[AB]$:

1) $\overrightarrow{AI} = \overrightarrow{IB}$ ou 2) $\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IB} = \overrightarrow{0}$ ou 3) $\overrightarrow{AB} = 2\overrightarrow{AI}$.

PARALLÉLISME ET ALIGNEMENT

— Deux droites (AB) et (CD) sont parallèles si, et seulement si, les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ sont colinéaires.
— Trois points A, B et C sont alignés si, et seulement si, les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont colinéaires.

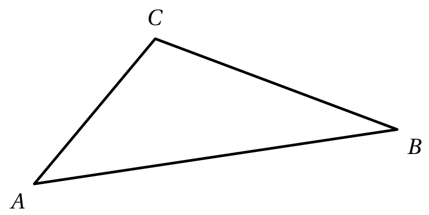
Application 1 : Construction de points à partir d'une égalité vectorielle
Soit trois points non alignés A, B et C. Construire le point M défini par $\overrightarrow{MA} - 3\overrightarrow{MB} = \overrightarrow{AC}$

La méthode pour construire un point M défini par une égalité vectorielle est d'obtenir une relation du type :

$$\overrightarrow{\underbrace{O}_{\text{origine connue}}M} = \underbrace{\vec{u}}_{\text{vecteur connu}}$$

Application 2 : Parallélisme, alignement

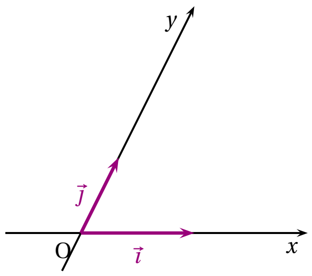
Soit ABC un triangle, I le milieu de $[AC]$, M est le symétrique de B par rapport à C et le point N est tel que $\overrightarrow{AN} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB}$. Les points M, I et N sont-ils alignés ?



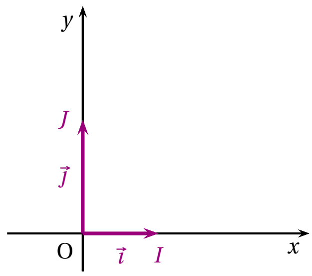
IV COORDONNÉES

1 REPÈRE DU PLAN

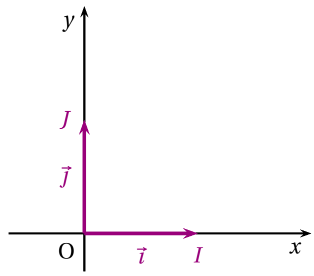
On appelle base tout couple $(\vec{\imath}, \vec{\jmath})$ de vecteurs non colinéaires.
Un repère du plan est un triplet $(\mathrm{O}; \vec{\imath}, \vec{\jmath})$ où O est un point du plan (appelé origine du repère) et $(\vec{\imath}, \vec{\jmath})$ une base.



Repère quelconque



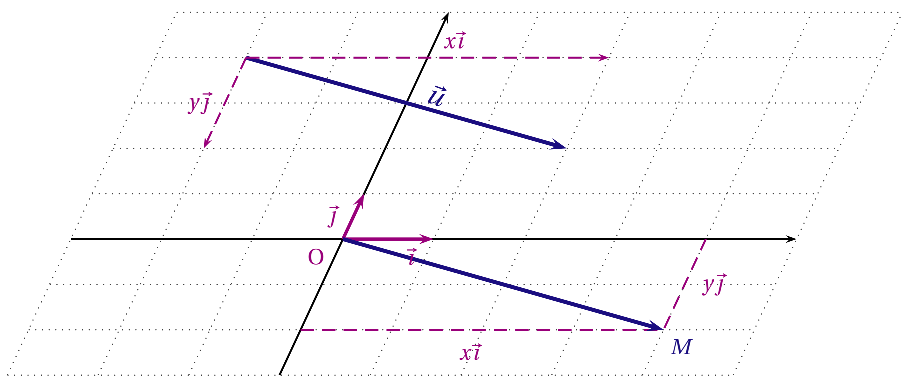
Repère orthogonal
$(OI) \perp (OJ)$



Repère orthonormé
$(OI) \perp (OJ)$ et $OI = OJ$

2 COORDONNÉES D'UN VECTEUR

Le plan est muni d'un repère $(\mathrm{O}; \vec{\imath}, \vec{\jmath})$. Soit $\vec{u}$ un vecteur.
On appelle coordonnées du vecteur $\vec{u}$ les coordonnées du point $M(x; y)$ dans le repère $(\mathrm{O}; \vec{\imath}, \vec{\jmath})$ tel que $\overrightarrow{\mathrm{O}M} = \vec{u}$.
On note indifféremment $\vec{u}(x; y)$ ou $\vec{u}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$.



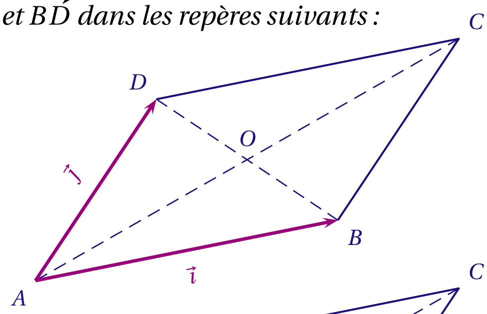
- $(x; y)$ sont les coordonnées du point M dans le repère $(\mathrm{O}; \vec{\imath}, \vec{\jmath})$ signifie que $\overrightarrow{\mathrm{O}M} = x\vec{\imath} + y\vec{\jmath}$.
- $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ sont les coordonnées du vecteur $\vec{u}$ dans le repère $(\mathrm{O}; \vec{\imath}, \vec{\jmath})$ signifie que $\vec{u} = x\vec{\imath} + y\vec{\jmath}$.

Remarque :
Les coordonnées d'un vecteur dépendent du choix du repère.

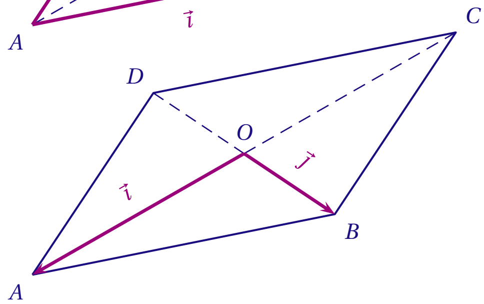
APPLICATION 3 :

ABCD est un parallélogramme de centre O.
Déterminer les coordonnées des points A,B,C et D et des vecteurs $\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{BD}$ dans les repères suivants :

- Dans le repère $\left(A;\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right)$:



- Dans le repère $\left(\text{O};\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB}\right)$:



PROPRIÉTÉS DES COORDONNÉES

Soit $(\text{O};\vec{\imath},\vec{\jmath})$ un repère du plan, $\vec{u}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}x'\\y'\end{pmatrix}$ deux vecteurs :

— $\vec{u}=\vec{0}$ équivaut à $x=0$ et $y=0$.

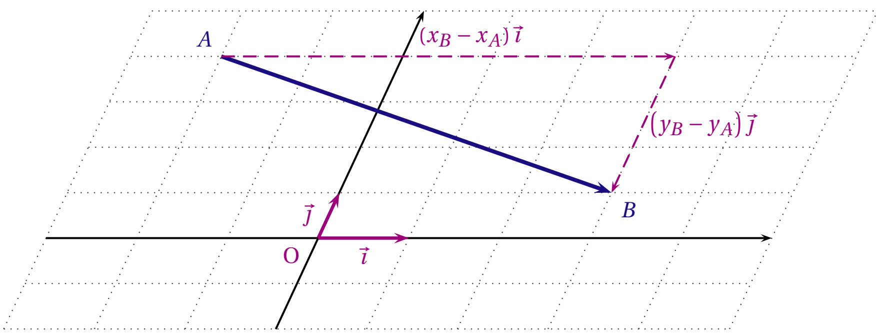
— $\vec{u}=\vec{v}$ équivaut à $x=x'$ et $y=y'$.

— Le vecteur $\vec{u}+\vec{v}$ a pour coordonnées $\begin{pmatrix}x+x'\\y+y'\end{pmatrix}$.

— pour tout réel k, le vecteur $k\vec{u}$ a pour coordonnées $\begin{pmatrix}kx\\ky\end{pmatrix}$.

3 COORDONNÉES DU VECTEUR $\overrightarrow{AB}$

Soit $(\text{O};\vec{\imath},\vec{\jmath})$ un repère du plan et deux points $A(x_A;y_A)$ et $B(x_B;y_B)$.
Les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{AB}$ dans le repère $(\text{O};\vec{\imath},\vec{\jmath})$ sont $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}x_B-x_A\\y_B-y_A\end{pmatrix}$.



4 CONDITION DE COLINÉARITÉ

DÉTERMINANT DE DEUX VECTEURS

Définition :
On appelle **déterminant** de deux vecteurs $\vec{u}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}x'\\y'\end{pmatrix}$ le nombre $xy'-x'y$.
On le note :

$$Det(\vec{u};\vec{v})=\begin{vmatrix}x & x'\\y & y'\end{vmatrix}=xy'-x'y$$

THÉORÈME :

Soit $(O;\vec{\imath},\vec{\jmath})$ un repère du plan.
Les vecteurs $\vec{u}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}x'\\y'\end{pmatrix}$ sont colinéaires si, et seulement si leur déterminant est nul.

APPLICATION 4 :

Déterminer si les vecteurs $\vec{u}\begin{pmatrix}3\\-1\end{pmatrix}$ *et* $\vec{v}\begin{pmatrix}\frac{9}{2}\\-\frac{3}{2}\end{pmatrix}$ *sont colinéaires*.

5 ÉQUATION CARTÉSIENNE DE DROITE

VECTEUR DIRECTEUR

Définition
(D) est une droite du plan. On appelle vecteur directeur de (D) tout vecteur non nul $\vec{u}$ qui possède la même direction que la droite (D).

Théorème :
Toute droite (D) admet une équation de la forme $ax+by+c=0$ avec $(a;b)\neq(0;0)$.
Un vecteur directeur de (D) est $\vec{u}\begin{pmatrix}-b\\a\end{pmatrix}$. Cette équation est appelée équation cartésienne de la droite (D)

Théorème réciproque :
L'ensemble des points $M(x;y)$ tels que $ax+by+c=0$ avec $(a;b)\neq(0;0)$ est une droite (D) de vecteur directeur $\vec{u}\begin{pmatrix}-b\\a\end{pmatrix}$

APPLICATIONS 5 :

Dans un repère du plan $\left(\mathrm{O};\vec{\imath},\vec{\jmath}\right)$ *on donne deux points* $A(2;3)$ *et* $B(-1;4)$.
Déterminer une équation cartésienne de la droite (AB)

Dans un repère du plan $\left(\mathrm{O};\vec{\imath},\vec{\jmath}\right)$ *on donne un points* $A(-2;1)$ *et un vecteur* $\vec{u}\begin{pmatrix}2\\-1\end{pmatrix}$
Déterminer une équation cartésienne de la droite passant par le point A *et ayant* $\vec{u}$ *comme vecteur directeur.*

6 COORDONNÉES DU MILIEU D'UN SEGMENT

Soit $\left(\mathrm{O};\vec{\imath},\vec{\jmath}\right)$ un repère du plan et deux points $A\left(x_A;y_A\right)$ et $B\left(x_B;y_B\right)$.
Les coordonnées du milieu $I\left(x_I;y_I\right)$ du segment $[AB]$ sont :

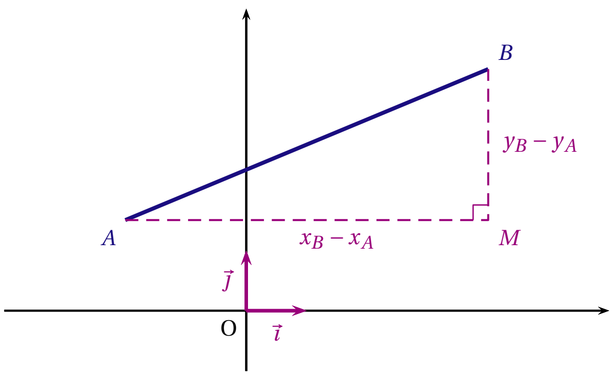
$$x_I=\frac{x_A+x_B}{2}\quad\text{et}\quad y_I=\frac{y_A+y_B}{2}$$

7 DISTANCE DANS UN REPÈRE ORTHONORMÉ

Soient $A\left(x_A;y_A\right)$ et $B\left(x_B;y_B\right)$ deux points du plan muni d'un repère *orthonormal* $\left(\mathrm{O};\vec{\imath},\vec{\jmath}\right)$, la distance AB est donné par

$$AB=\sqrt{\left(x_B-x_A\right)^2+\left(y_B-y_A\right)^2}$$

ILLUSTRATION



APPLICATIONS 6 :

Dans un repère du plan $\left(\mathrm{O};\vec{\imath},\vec{\jmath}\right)$ *on donne quatre points* $A(2;1)$, $B(5;2)$, $C(4;-1)$ *et* $D(1;-2)$.
Quelle est la nature du quadrilatère ABDC? **EXERCICE 9** **5 points**

Pour son mariage, le samedi 20 août 2016, Norbert souhaite se faire livrer des macarons.
L'entreprise lui demande de payer 402 € avec les frais de livraison compris.
À l'aide des documents ci-dessous, déterminer dans quelle zone se trouve l'adresse de livraison.

Document 1 : Bon de commande de Norbert

10 boîtes de 12 petits macarons chocolat
10 boîtes de 12 petits macarons vanille
5 boîtes de 12 petits macarons framboise
2 boîtes de 12 petits macarons café
1 boîte de 6 petits macarons caramel

Document 2 : Tarifs de la boutique

Parfum au choix	Jusqu'à 5 boites achetées	*À partir de la sixième boîte identique achetée, profitez de 20 % de réduction sur toutes vos boîtes de ce parfum*
Boîte de 6 petits macarons	9 € la boîte	
Boîte de 12 petits macarons	16 € la boîte	
Boîte de 6 gros macarons	13,50 € la boîte	
Boîte de 12 gros macarons	25 € la boîte	
Les frais de livraison, en supplément, sont détaillés ci-dessous en fonction de la zone de livraison.		

Document 3 : Tarifs de livraison

	En semaine	Samedi et dimanche
Zone A	12,50 €	17,50 €
Zone B	20 €	25 €
Zone C	25 €	30 €