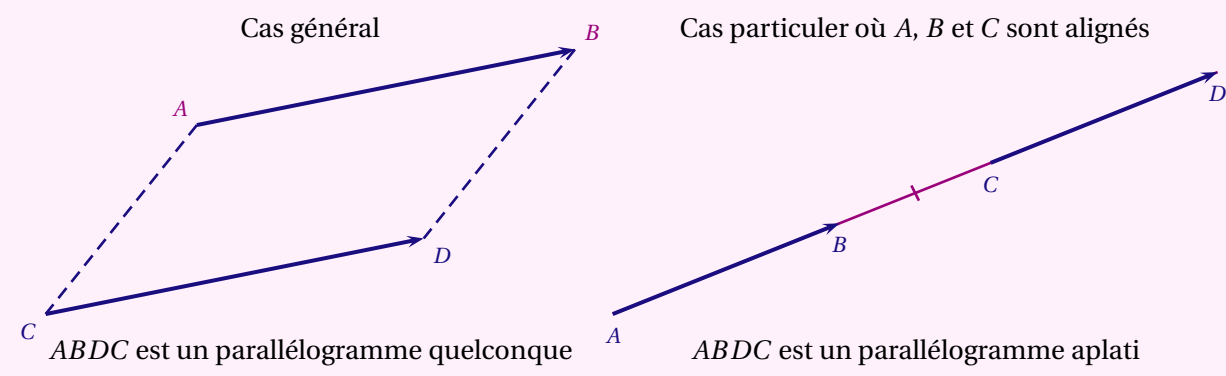


I DÉFINITION D'UN VECTEUR

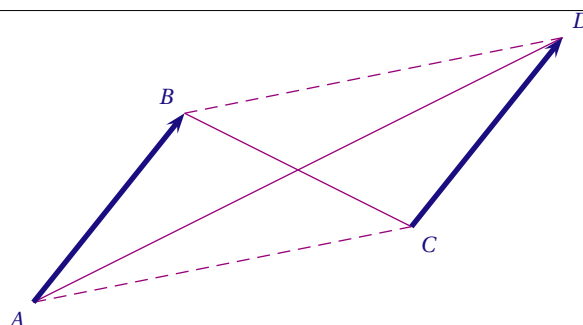
1 TRANSLATION

Définition : Soient  $A$  et  $B$  deux points du plan.  
 La translation qui transforme  $A$  en  $B$  associe à tout point  $C$  du plan, l'unique point  $D$  tel que  $ABDC$  soit un parallélogramme.  
 Cette translation est la translation de vecteur  $\vec{AB}$ .



2 ÉGALITÉ DE DEUX VECTEURS

**Définition :**  
 Deux vecteurs sont égaux s'ils sont associés à la même translation.



**Propriété :**  
 $A, B, C$  et  $D$  sont quatre points du plan.  
 $\vec{AB} = \vec{CD}$  si, et seulement si,  $ABDC$  est un parallélogramme.

3 REPRÉSENTATION D'UN VECTEUR

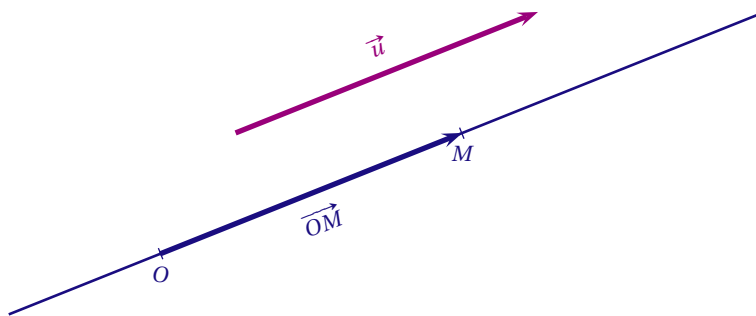
Devant des égalités du type  $\vec{AB} = \vec{DC} = \vec{FE} = \dots$ , on dit que les vecteurs  $\vec{AB}, \vec{DC}, \vec{FE}, \dots$  sont des représentants du vecteur  $\vec{u}$  :

$$\vec{u} = \vec{AB} = \vec{DC} = \vec{FE} = \dots$$

Le vecteur  $\vec{AA} = \vec{BB} = \dots$  est appelé le vecteur nul, noté  $\vec{0}$ .

Soit  $O$  un point du plan. Pour tout vecteur  $\vec{u}$ , il existe un point  $M$  unique tel que  $\vec{u} = \vec{OM}$ .  
 Si  $\vec{u}$  n'est pas le vecteur nul, les points  $O$  et  $M$  sont distincts. Le vecteur  $\vec{u}$  est caractérisé par :

- Sa direction : c'est celle de la droite  $(OM)$ .
- Son sens : c'est le sens de  $O$  vers  $M$ .
- Sa norme notée  $\|\vec{u}\|$  : c'est la distance  $OM$ .



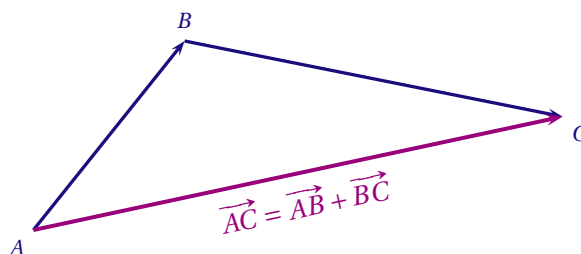
**II ADDITION VECTORIELLE**

**1 SOMME DE DEUX VECTEURS**

Soit trois points  $A, B$  et  $C$ .

Si on applique la translation de vecteur  $\vec{AB}$  suivie de la translation de vecteur  $\vec{BC}$ , on obtient la translation de vecteur  $\vec{AC}$ .

Le vecteur  $\vec{AC}$  est la somme des vecteurs  $\vec{AB}$  et  $\vec{BC}$



**RELATION DE CHASLES**

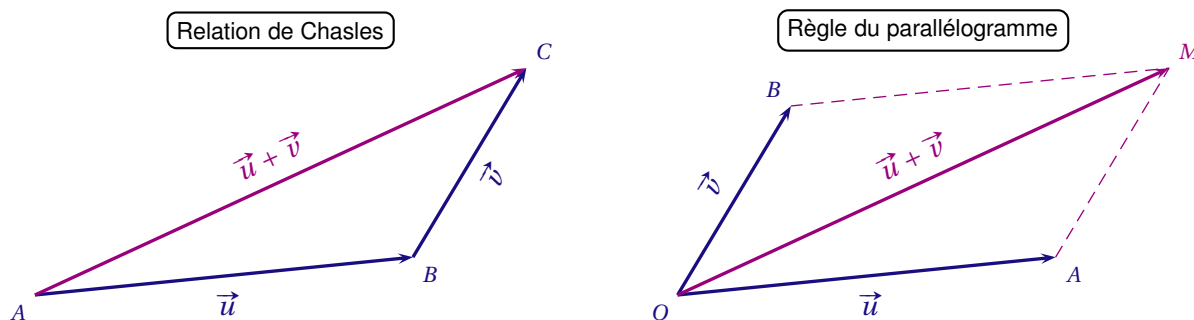
Quels que soient les points  $A, B$  et  $C$  on a :

$$\vec{AB} + \vec{BC} = \vec{AC}$$

**RÈGLE DU PARALLÉLOGRAMME**

La somme  $\vec{OA} + \vec{OB}$  est le vecteur  $\vec{OM}$  tel que  $OAMB$  est un parallélogramme.

**CONSTRUCTION DE LA SOMME DE DEUX VECTEURS**



**PROPRIÉTÉS ALGÈBRIQUES**

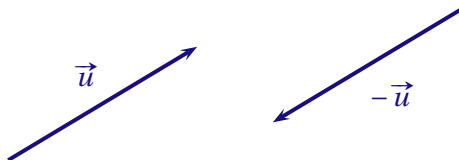
Quels que soient les vecteurs  $\vec{u}, \vec{v}$  et  $\vec{w}$

$$\vec{u} + \vec{v} = \vec{v} + \vec{u}; \quad \vec{u} + \vec{0} = \vec{0} + \vec{u} = \vec{u}; \quad (\vec{u} + \vec{v}) + \vec{w} = \vec{u} + (\vec{v} + \vec{w})$$

## 2 DIFFÉRENCE DE DEUX VECTEURS

### OPPOSÉ D'UN VECTEUR

L'opposé d'un vecteur  $\vec{u}$  est le vecteur noté  $(-\vec{u})$  tel que  $\vec{u} + (-\vec{u}) = \vec{0}$ .

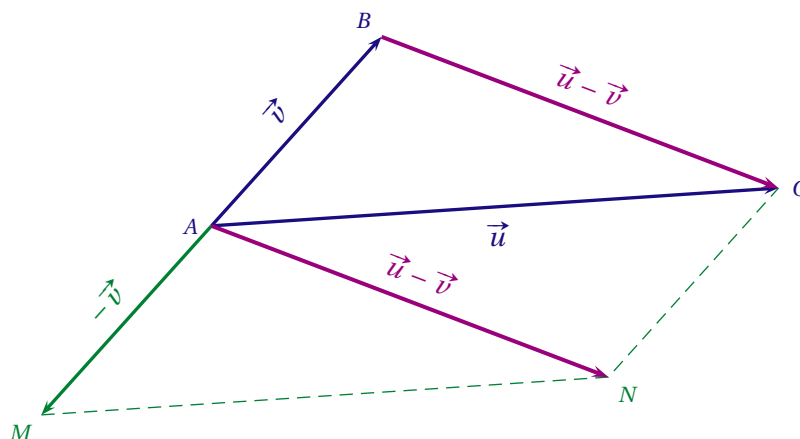


### CONSÉQUENCE

L'opposé du vecteur  $\vec{AB}$  est le vecteur  $\vec{BA}$  :  $-\vec{AB} = \vec{BA}$

### DÉFINITION

Étant donné deux vecteurs  $\vec{u}$  et  $\vec{v}$  la différence  $\vec{u} - \vec{v}$  est le vecteur  $\vec{u} + (-\vec{v})$ .



Quels que soient les points  $A, B$  et  $C$ ,  $\vec{BC} = \vec{AC} - \vec{AB}$

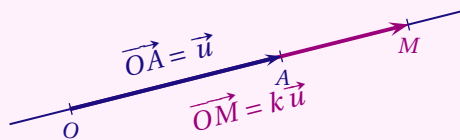
## III MULTIPLICATION D'UN VECTEUR PAR UN RÉEL

## 1 PRODUIT D'UN VECTEUR PAR UN RÉEL $k$

**Définition :** Soit  $\vec{u}$  un vecteur non nul ( $\vec{u} \neq \vec{0}$ ) et  $k$  un réel non nul ( $k \neq 0$ ).  
Le produit du vecteur  $\vec{u}$  par le réel  $k$ , noté  $k\vec{u}$  est le vecteur caractérisé par :

— sa direction :  $k\vec{u}$  a la même direction que le vecteur  $\vec{u}$  ;

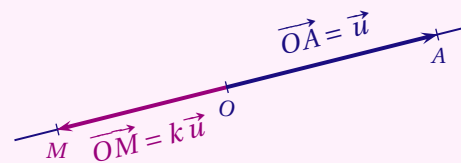
Cas où  $k > 0$



- son sens : le vecteur  $k\vec{u}$  a le même sens que le vecteur  $\vec{u}$  ;
- sa norme : la norme du vecteur  $k\vec{u}$  est égale au produit de la norme du vecteur  $\vec{u}$  par le réel  $k$

$$\|k\vec{u}\| = k \times \|\vec{u}\|$$

Cas où  $k < 0$

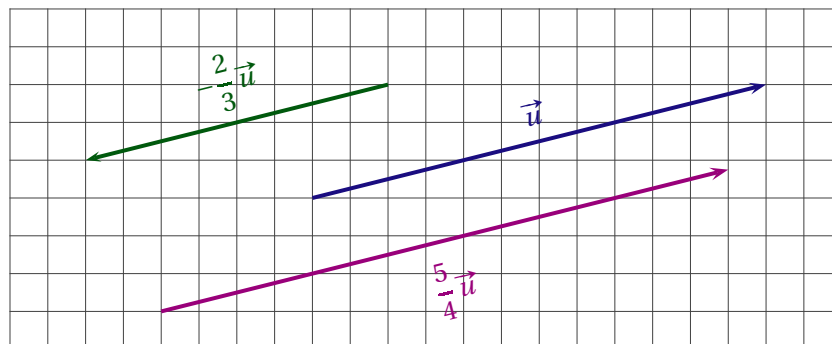


- son sens : le vecteur  $k\vec{u}$  est de sens opposé au sens du vecteur  $\vec{u}$  ;
- sa norme : la norme du vecteur  $k\vec{u}$  est égale au produit de la norme du vecteur  $\vec{u}$  par l'opposé du réel  $k$

$$\|k\vec{u}\| = -k \times \|\vec{u}\|$$

Ce qui s'écrit de façon générale  $\|k\vec{u}\| = |k| \times \|\vec{u}\|$  et se lit :

« la norme du vecteur  $k\vec{u}$  est égale au produit de la norme du vecteur  $\vec{u}$  par la valeur absolue du réel  $k$  »



## 2 PROPRIÉTÉS ALGÈBRIQUES

Pour tous vecteurs  $\vec{u}$  et  $\vec{v}$  et pour tous réels  $k$  et  $k'$  :

$$k(\vec{u} + \vec{v}) = k\vec{u} + k\vec{v};$$

$$(k + k')\vec{u} = k\vec{u} + k'\vec{u};$$

$$k\vec{u} = \vec{0} \iff k = 0 \text{ ou } \vec{u} = \vec{0}$$

## 3 VECTEURS COLINÉAIRES

### DÉFINITION

Deux vecteurs  $\vec{u}$  et  $\vec{v}$  sont dits colinéaires s'il existe un réel  $k$  tel que  $\vec{u} = k\vec{v}$  ou  $\vec{v} = k\vec{u}$

### REMARQUES

Deux vecteurs non nuls sont colinéaires si, et seulement si, ils ont la même direction.

4 APPLICATIONS GÉOMÉTRIQUES

AVEC LES MILIEUX

Étant donné un segment  $[AB]$ . Chacune des propriétés suivantes caractérise le milieu  $I$  du segment  $[AB]$  :

1)  $\vec{AI} = \vec{IB}$     ou    2)  $\vec{IA} + \vec{IB} = \vec{0}$     ou    3)  $\vec{AB} = 2\vec{AI}$ .

PARALLÉLISME ET ALIGNEMENT

- Deux droites  $(AB)$  et  $(CD)$  sont parallèles si, et seulement si, les vecteurs  $\vec{AB}$  et  $\vec{CD}$  sont colinéaires.
- Trois points  $A, B$  et  $C$  sont alignés si, et seulement si, les vecteurs  $\vec{AB}$  et  $\vec{AC}$  sont colinéaires.

EXEMPLES :

EXEMPLE 1 : CONSTRUCTION DE POINTS

Soit trois points non alignés  $A, B$  et  $C$ . Construire le point  $M$  défini par  $\vec{MA} - 3\vec{MB} = \vec{AC}$

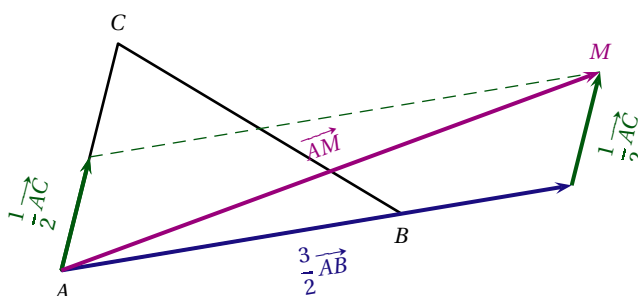
La méthode pour construire un point  $M$  défini par une égalité vectorielle est d'obtenir une relation du type :

$$\underbrace{\vec{OM}}_{\text{origine connue}} = \underbrace{\vec{u}}_{\text{vecteur connu}}$$

- Choisissons par exemple  $A$  comme « origine connue »

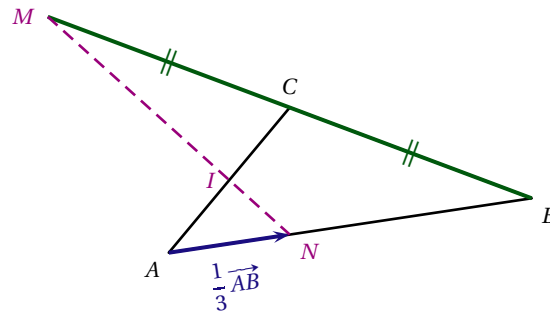
$$\begin{aligned} \vec{MA} - 3\vec{MB} = \vec{AC} &\iff \vec{MA} - 3(\vec{MA} + \vec{AB}) = \vec{AC} \\ &\iff \vec{MA} - 3\vec{MA} - 3\vec{AB} = \vec{AC} \\ &\iff -2\vec{MA} = 3\vec{AB} + \vec{AC} \\ &\iff \vec{MA} = -\frac{3}{2}\vec{AB} - \frac{1}{2}\vec{AC} \\ &\iff \vec{AM} = \frac{3}{2}\vec{AB} + \frac{1}{2}\vec{AC} \end{aligned}$$

- Nous pouvons construire le point  $M$  :



EXEMPLE 2 : PARALLÉLISME, ALIGNEMENT

Soit  $ABC$  un triangle,  $I$  le milieu de  $[AC]$ ,  $M$  est la symétrique de  $B$  par rapport à  $C$  et le point  $N$  est tel que  $\vec{AN} = \frac{1}{3}\vec{AB}$ . Les points  $M, I$  et  $N$  sont-ils alignés ?



—  $I$  est le milieu du segment  $[AC]$  donc  $\overrightarrow{AI} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$

—  $M$  est le symétrique de  $B$  par rapport à  $C$  donc  $C$  est le milieu du segment  $[BM]$  d'où  $\overrightarrow{MC} = \overrightarrow{CB}$ .

Exprimons les vecteurs  $\overrightarrow{MI}$  et  $\overrightarrow{IN}$  en fonction des vecteurs  $\overrightarrow{AB}$  et  $\overrightarrow{AC}$  :

$$\overrightarrow{MI} = \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{CI} = \overrightarrow{CB} - \frac{1}{2}\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{AB} - \frac{1}{2}\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} - \frac{3}{2}\overrightarrow{AC}$$

$$\overrightarrow{IN} = \overrightarrow{IA} + \overrightarrow{AN} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{AC} + \frac{1}{3}\overrightarrow{AB}$$

Ainsi,  $\overrightarrow{MI} = \overrightarrow{AB} - \frac{3}{2}\overrightarrow{AC}$  et  $\overrightarrow{IN} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB} - \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$  d'où  $\overrightarrow{MI} = 3\overrightarrow{IN}$ .

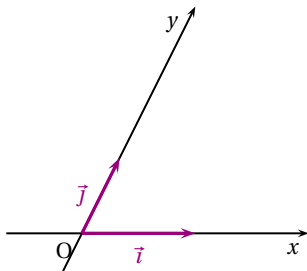
Par conséquent, les vecteurs  $\overrightarrow{MI}$  et  $\overrightarrow{IN}$  sont colinéaires donc les points  $M$ ,  $I$  et  $N$  sont alignés.

## IV COORDONNÉES

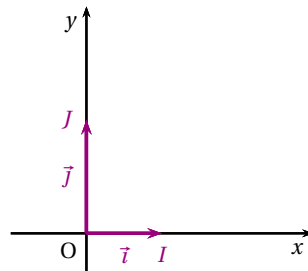
### 1 REPÈRE DU PLAN

On appelle base tout couple  $(\vec{i}, \vec{j})$  de vecteurs non colinéaires.

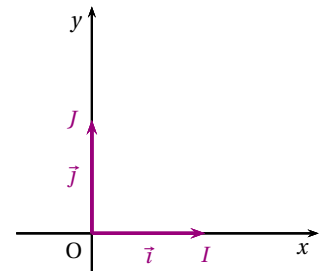
Un repère du plan est un triplet  $(O; \vec{i}, \vec{j})$  où  $O$  est un point du plan (appelé origine du repère) et  $(\vec{i}, \vec{j})$  une base.



Repère quelconque



Repère orthogonal  
( $OI \perp OJ$ )



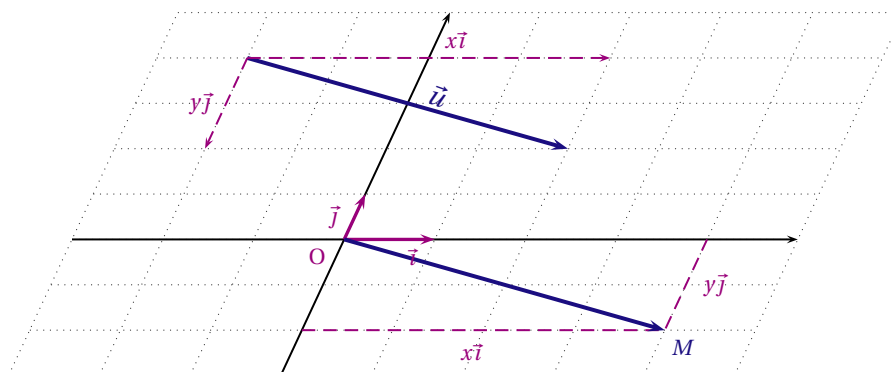
Repère orthonormé  
( $OI \perp OJ$ ) et  $OI = OJ$

### 2 COORDONNÉES D'UN VECTEUR

Le plan est muni d'un repère  $(O; \vec{i}, \vec{j})$ . Soit  $\vec{u}$  un vecteur.

On appelle coordonnées du vecteur  $\vec{u}$  les coordonnées du point  $M(x; y)$  dans le repère  $(O; \vec{i}, \vec{j})$  tel que  $\overrightarrow{OM} = \vec{u}$ .

On note indifféremment  $\vec{u}(x; y)$  ou  $\vec{u} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ .



- $(x; y)$  sont les coordonnées du point  $M$  dans le repère  $(O; \vec{i}, \vec{j})$  signifie que  $\vec{OM} = x\vec{i} + y\vec{j}$ .
- $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$  sont les coordonnées du vecteur  $\vec{u}$  dans le repère  $(O; \vec{i}, \vec{j})$  signifie que  $\vec{u} = x\vec{i} + y\vec{j}$ .

REMARQUE

Les coordonnées d'un vecteur dépendent du choix du repère.

EXEMPLE

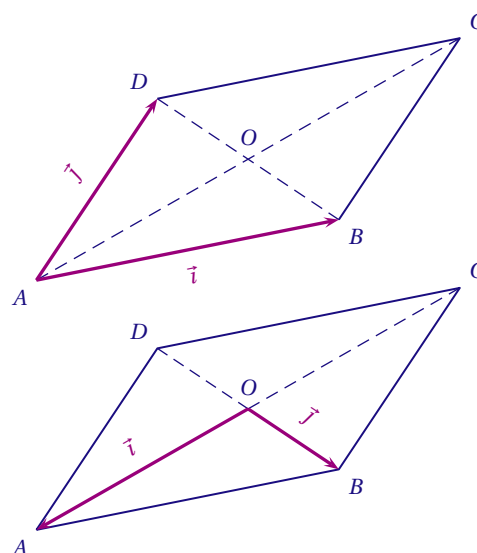
$ABCD$  est un parallélogramme de centre  $O$ .

— Dans le repère  $(A; \vec{AB}, \vec{AC})$  :

$A(0;0), B(1;0), C(1;1), D(0;1), \vec{AC} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$  et  $\vec{BD} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$

— Dans le repère  $(O; \vec{OA}, \vec{OB})$  :

$A(1;0), B(0;1), C(-1;0), D(0;-1), \vec{AC} \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \end{pmatrix}$  et  $\vec{BD} \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}$



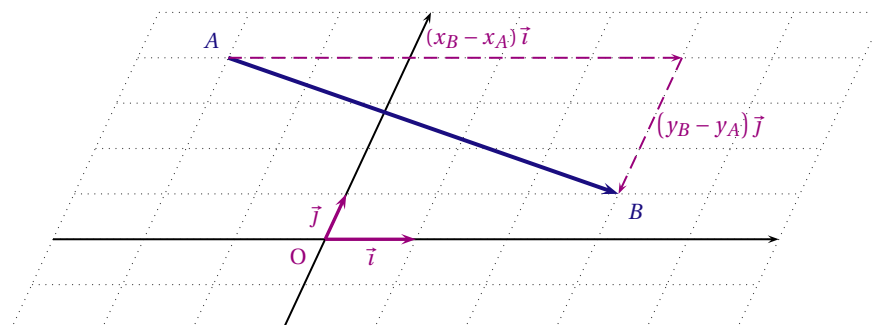
PROPRIÉTÉS DES COORDONNÉES

- Soit  $(O; \vec{i}, \vec{j})$  un repère du plan,  $\vec{u} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$  et  $\vec{v} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$  deux vecteurs :
- $\vec{u} = \vec{0}$  équivaut à  $x = 0$  et  $y = 0$ .
  - $\vec{u} = \vec{v}$  équivaut à  $x = x'$  et  $y = y'$ .
  - Le vecteur  $\vec{u} + \vec{v}$  a pour coordonnées  $\begin{pmatrix} x + x' \\ y + y' \end{pmatrix}$ .
  - pour tout réel  $k$ , le vecteur  $k\vec{u}$  a pour coordonnées  $\begin{pmatrix} kx \\ ky \end{pmatrix}$ .

### 3 COORDONNÉES DU VECTEUR $\vec{AB}$

Soit  $(O; \vec{i}, \vec{j})$  un repère du plan et deux points  $A(x_A; y_A)$  et  $B(x_B; y_B)$ .

Les coordonnées du vecteur  $\vec{AB}$  dans le repère  $(O; \vec{i}, \vec{j})$  sont  $\vec{AB} \begin{pmatrix} x_B - x_A \\ y_B - y_A \end{pmatrix}$ .



### 4 CONDITION DE COLINÉARITÉ

#### DÉTERMINANT DE DEUX VECTEURS

##### Définition :

On appelle **déterminant** de deux vecteurs  $\vec{u} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$  et  $\vec{v} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$  le nombre  $xy' - x'y$ .

On le note :

$$\text{Det}(\vec{u}; \vec{v}) = \begin{vmatrix} x & x' \\ y & y' \end{vmatrix} = xy' - x'y$$

##### THÉORÈME :

Soit  $(O; \vec{i}, \vec{j})$  un repère du plan.

Les vecteurs  $\vec{u} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$  et  $\vec{v} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$  sont colinéaires si, et seulement si leur déterminant est nul.

##### APPLICATION :

Déterminer si les vecteurs  $\vec{u} \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix}$  et  $\vec{v} \begin{pmatrix} \frac{9}{2} \\ -\frac{3}{2} \end{pmatrix}$  sont colinéaires.

On calcule le déterminant des vecteurs  $\vec{u}$  et  $\vec{v}$  :

On a :

$$\text{Det}(\vec{u}; \vec{v}) = \begin{vmatrix} 3 & \frac{9}{2} \\ -1 & -\frac{3}{2} \end{vmatrix} = 3 \times \left(-\frac{3}{2}\right) - (-1) \times \frac{9}{2} = -\frac{9}{2} + \frac{9}{2} = 0$$

On en déduit que les vecteurs  $\vec{u}$  et  $\vec{v}$  sont colinéaires.

## 5 ÉQUATION CARTÉSIENNE DE DROITE

### VECTEUR DIRECTEUR

#### Définition

$(D)$  est une droite du plan. On appelle vecteur directeur de  $(D)$  tout vecteur non nul  $\vec{u}$  qui possède la même direction que la droite  $(D)$ .

#### Théorème :

Toute droite  $(D)$  admet une équation de la forme  $ax + by + c = 0$  avec  $(a; b) \neq (0; 0)$ .

Un vecteur directeur de  $(D)$  est  $\vec{u} \begin{pmatrix} -b \\ a \end{pmatrix}$ . Cette équation est appelée équation cartésienne de la droite  $(D)$

#### Théorème réciproque :

L'ensemble des points  $M(x; y)$  tels que  $ax + by + c = 0$  avec  $(a; b) \neq (0; 0)$  est une droite  $(D)$  de vecteur directeur  $\vec{u} \begin{pmatrix} -b \\ a \end{pmatrix}$

## 6 COORDONNÉES DU MILIEU D'UN SEGMENT

Soit  $(O; \vec{i}, \vec{j})$  un repère du plan et deux points  $A(x_A; y_A)$  et  $B(x_B; y_B)$ .  
Les coordonnées du milieu  $I(x_I; y_I)$  du segment  $[AB]$  sont :

$$x_I = \frac{x_A + x_B}{2} \text{ et } y_I = \frac{y_A + y_B}{2}$$

## 7 DISTANCE DANS UN REPÈRE ORTHONORMÉ

Soient  $A(x_A; y_A)$  et  $B(x_B; y_B)$  deux points du plan muni d'un repère *orthonormal*  $(O; \vec{i}, \vec{j})$ , la distance  $AB$  est donné par

$$AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}$$

### ILLUSTRATION

