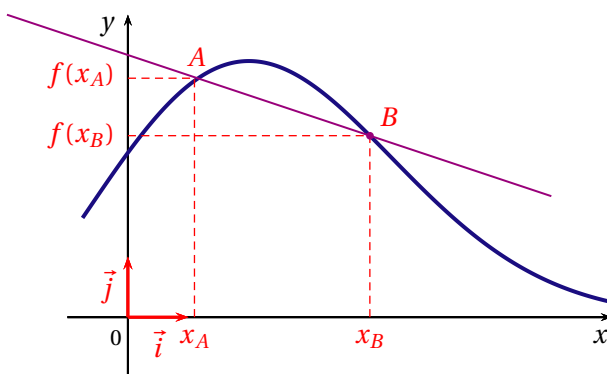


DÉRIVATION

I TAUX DE VARIATION

1 DÉFINITION

On nomme f une fonction définie sur I et \mathcal{C}_f sa courbe représentative dans (O, \vec{i}, \vec{j}) .
 On nomme $A(x_A; y_A)$ et $B(x_B; y_B)$ deux points de \mathcal{C}_f



2 PROPRIÉTÉ

Le taux de variation de f entre a et b est le

3 EXEMPLES

On note f la fonction définie \mathbb{R} par $f(x) = 5x^2 - 6x + 7$.
 Calculer le taux de variation de f entre 3 et -2.

II NOMBRE DÉRIVÉE

1 INTRODUCTION :

On cherche maintenant à savoir ce qui se passe si on rapproche le point B vers le A jusqu'à ce qu'ils se superposent.
 On remarque que lorsqu'on rapproche B de A la droite (AB) se rapproche de la tangente à la courbe \mathcal{C}_f au point d'abscisse a .

Lorsque B est très très proche de A alors la droite (AB) est confondue avec la tangente à la courbe \mathcal{C}_f au point d'abscisse a .

Comment traduire cela de façon mathématiques?

On traduit donc de la façon suivante :

Le coefficient directeur de la tangente à la courbe \mathcal{C}_f au point d'abscisse a est le taux de variation de f entre a et b lorsque B se rapproche de A .

On note $b = a + h$, l'abscisse du point B .

Pour traduire que le point B est tout proche de A , on va donc dire que h tend vers 0. (car si h tend vers 0, alors $a + h$ tend vers a).

Il faut donc calculer le taux de variation de f entre $a + h$ et a lorsque h tend vers 0.

Or $\tau = \dots\dots$

Le coefficient directeur de la tangente à la courbe \mathcal{C}_f au point d'abscisse a est :

$$m = \dots\dots\dots$$

2 DÉFINITION :

Soit f une fonction définie sur un intervalle I de \mathbb{R} et a un réel appartenant à I .

Lorsque le rapport $\frac{f(a+h) - f(a)}{h}$ admet une limite réelle quand h tend vers 0 (avec $a + h$ restant dans I), on dit que la fonction f est dérivable en a et cette limite réelle, notée $f'(a)$, est appelée le nombre dérivé de f en a .

On note $f'(a)$ le nombre :

$$\dots\dots\dots$$

3 APPLICATION

Soit $f : x \mapsto x^2$ définie sur \mathbb{R} . Calculer $f'(2)$

Soit $g : x \mapsto \frac{1}{x}$ définie sur \mathbb{R}^* . Calculer $g'(-1)$

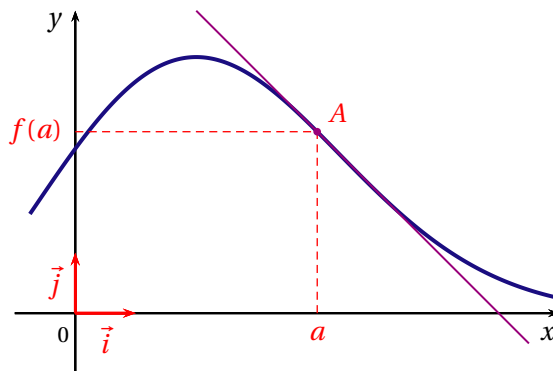
Soit $h : x \mapsto \sqrt{x}$ définie sur \mathbb{R}^+ .

4 TANGENTE À UNE COURBE

DÉMONSTRATION

Soit f une fonction définie sur un intervalle I , dérivable en a où a est un réel de I , et C_f sa courbe représentative dans un repère du plan.

La droite (T) passant par le point $A(a; f(a))$ de la courbe C_f et de coefficient directeur $f'(a)$ est appelée la tangente à la courbe C_f au point d'abscisse a



On cherche à connaître l'équation de la tangente (T) à C_f en a .

On sait que l'équation est de la forme $(T) : y = mx + p$ avec : $m = f'(a)$ et donc l'équation de la tangente (T) est de la forme : $(T) : y = f'(a)x + p$

Comme $A(a; f(a)) \in (T)$

$$(T) : f(a) = f'(a) \times a + p$$

On trouve donc que $p = f(a) - f'(a) \times a$

donc l'équation de (T) est $(T) : y = f'(a) \times x + f(a) - f'(a) \times a = f'(a)(x - a) + f(a)$

PROPRIÉTÉ

Soit f une fonction définie sur un intervalle I , dérivable en a où a est un réel de I , et C_f sa courbe représentative dans un repère du plan.

L'équation réduite de la tangente à la courbe C_f au point A d'abscisse a est :

$$y = f'(a) \times (x - a) + f(a)$$

REMARQUE

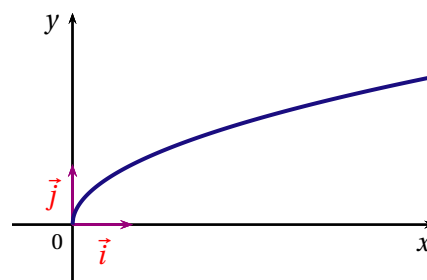
La courbe représentative d'une fonction f peut avoir une tangente en un point a sans que la fonction soit dérivable en a .

La courbe représentative de la fonction racine carrée est tangente à la droite d'équation $x = 0$ en 0 .

Or la fonction racine carrée n'est pas dérivable en 0 en effet :

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x} - \sqrt{0}}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x}}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{\sqrt{x}} = +\infty$$

ce n'est pas une limite finie donc la fonction racine carrée n'est pas dérivable en 0 .



APPLICATION

Soit f la fonction définie sur \mathbb{R} par $f(x) = x^2$.

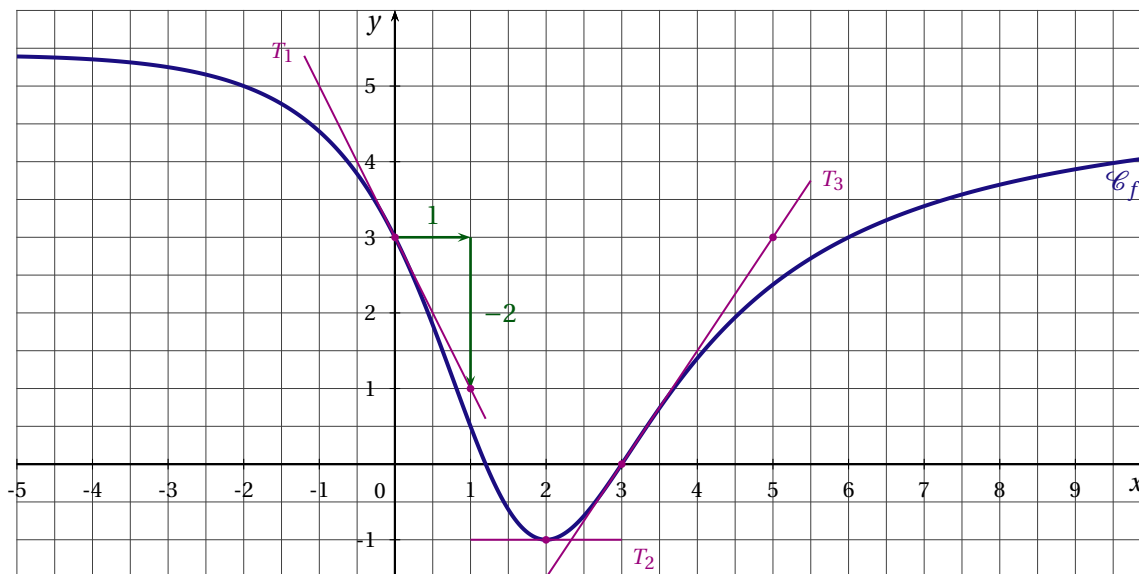
On souhaite calculer l'équation de (D) la tangente à \mathcal{C}_f au point d'abscisse $x_0 = 2$.

D'après les exemples précédents : $f'(2) = 4$ et $f(2) = 2^2 = 4$

donc l'équation de (D) est $y = 4(x - 2) + 4 = 4x - 8 + 4 = 4x - 4$

EXEMPLE GRAPHIQUE

La courbe \mathcal{C}_f tracée ci-dessous est la courbe représentative d'une fonction f définie sur \mathbb{R} .



Par lecture graphique, déterminer $f'(0)$, $f'(2)$ et $f'(3)$.

1. Le nombre dérivé $f'(0)$ est égal au coefficient directeur de la tangente T_1 à la courbe \mathcal{C}_f au point d'abscisse 0.

Par lecture graphique, le coefficient directeur de la droite T_1 est égal à -2 . Ainsi, $f'(0) = -2$

2. La tangente T_2 à la courbe \mathcal{C}_f au point d'abscisse 2 est parallèle à l'axe des abscisses. Donc $f'(2) = 0$

3. La droite T_3 , tangente à la courbe \mathcal{C}_f au point d'abscisse 3 passe par les points de coordonnées $(3;0)$ et $(5;3)$. Son coefficient directeur a est

$$a = \frac{3 - 0}{5 - 3} = \frac{3}{2}$$

Le nombre dérivé $f'(3)$ est égal au coefficient directeur de la tangente à la courbe \mathcal{C}_f au point d'abscisse

3. Donc $f'(3) = \frac{3}{2}$

III FONCTION DÉRIVÉE**1 INTRODUCTION**

On remarque qu'il y a un lien entre le signe du coefficient directeur des tangentes et les variations de la fonction f .

Sur la figure ci-dessus, on remarque que :

- Si la fonction est décroissante sur I alors le coefficient directeur des tangentes aux points d'abscisse dans I est négatif.
- Si la fonction est croissante sur I alors le coefficient directeur des tangentes aux points d'abscisse dans I est positif.

On voit donc que le signe du nombre dérivé est très important pour étudier les variations d'une fonction. Mais nous n'allons pas nous amuser à calculer le nombre dérivé en tous les points de l'ensemble de définition car nous allons y passer trop temps.

Nous allons donc construire des fonctions qui à x associe le nombre dérivé de f en x .

On nommera cette fonction la fonction dérivée de f .

2 DÉFINITION

Soit f une fonction définie sur un intervalle I de \mathbb{R} . Lorsque pour tout réel x appartenant à I , f est dérivable en x , on dit que f est dérivable sur I .

La fonction qui associe à tout réel x appartenant à I son nombre dérivé $f'(x)$ est appelée la fonction dérivée de f sur l'intervalle I . Elle est notée f' .

Attention :

L'ensemble de définition de f n'est pas toujours le même que l'ensemble de dérivabilité (ensemble de définition de f').

3 DÉMONSTRATION DES DÉRIVÉES DES FONCTIONS DE RÉFÉRENCE

DÉRIVÉE DE FONCTION AFFINE

On note f la fonction définie sur \mathbb{R} par $f(x) = ax + b$

Calculons le nombre dérivé de f en $x_0 \in \mathbb{R}$

$$\tau = \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} = \frac{a(x_0 + h) + b - ax_0 - b}{h} = \frac{ah}{h} = a \text{ donc } f'(x_0) = \lim_{h \rightarrow 0} a = a$$

Ainsi, la fonction dérivée de la fonction f définie sur \mathbb{R} par $f(x) = ax + b$ est $f'(x) = a$

DÉRIVÉE DE LA FONCTION CARRÉ

On note f la fonction définie sur \mathbb{R} par $f(x) = x^2$

Calculons le nombre dérivé de f en $x_0 \in \mathbb{R}$:

$$\tau = \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} = \frac{(x_0 + h)^2 - x_0^2}{h} = \frac{x_0^2 + 2hx_0 + h^2 - x_0^2}{h}$$

$$\text{donc } \tau = \frac{2hx_0 + h^2}{h} = 2x_0 + h \text{ donc } f'(x_0) = \lim_{h \rightarrow 0} 2x_0 + h = 2x_0$$

Ainsi, la fonction dérivée de la fonction f définie sur \mathbb{R} par $f(x) = x^2$ est $f'(x) = 2x$

DÉRIVÉE DE LA FONCTION INVERSE

On note f la fonction définie sur \mathbb{R}^* par $f(x) = \frac{1}{x}$

Calculons le nombre dérivé de f en $x_0 \in \mathbb{R}^*$

$$\tau = \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} = \frac{\frac{1}{x_0 + h} - \frac{1}{x_0}}{h} = \frac{\frac{x_0 - x_0 - h}{x_0^2 + hx_0}}{h}$$

$$\text{donc } \tau = \frac{-h}{x_0^2 + hx_0} \times \frac{1}{h} = \frac{-1}{x_0^2 + hx_0}$$

$$\text{donc } f'(x_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{-1}{x_0^2 + hx_0} = -\frac{1}{x_0^2}$$

Ainsi, la fonction dérivée de la fonction f définie sur \mathbb{R}^* par $f(x) = \frac{1}{x}$ est $f'(x) = -\frac{1}{x^2}$

DÉRIVÉE DE LA FONCTION RACINE CARRÉE

On note f la fonction définie sur \mathbb{R}_+ par $f(x) = \sqrt{x}$

Calculons le nombre dérivé de f en $x_0 \in \mathbb{R}^+$

$$\tau = \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} = \frac{\sqrt{x_0+h} - \sqrt{x_0}}{h} = \frac{(\sqrt{x_0+h} - \sqrt{x_0})(\sqrt{x_0+h} + \sqrt{x_0})}{h(\sqrt{x_0+h} + \sqrt{x_0})}$$

$$\text{donc } \tau = \frac{x_0+h - x_0}{h(\sqrt{x_0+h} + \sqrt{x_0})} = \frac{1}{\sqrt{x_0+h} + \sqrt{x_0}}$$

$$\text{donc } f'(x_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{\sqrt{x_0+h} + \sqrt{x_0}} = \frac{1}{2\sqrt{x_0}}$$

Ainsi, la fonction dérivée de la fonction f définie sur \mathbb{R}^* par $f(x) = \sqrt{x}$ est $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$

Attention, ici $f'(x)$ existe lorsque $x \in \mathbb{R}_+^*$ et pas sur \mathbb{R}^+

Le domaine de définition de f et celui de f' sont donc différents.

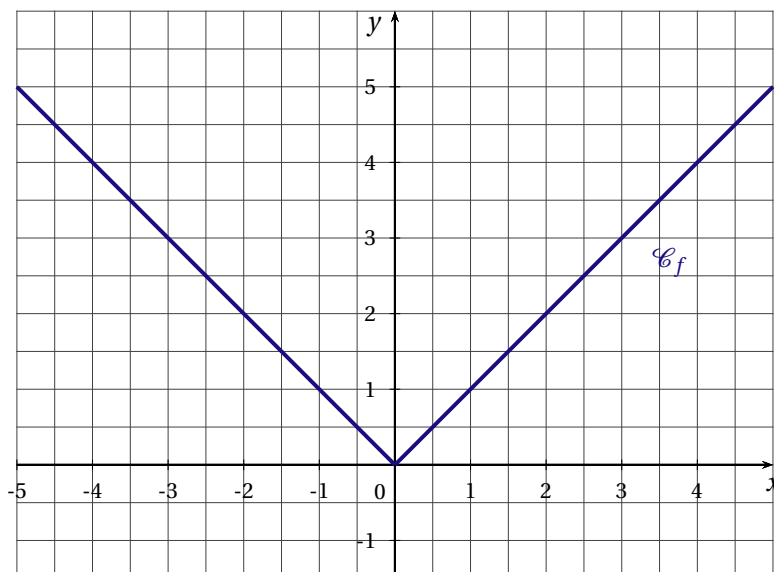
DÉRIVÉE DE LA FONCTION VALEUR ABSOLUE

La fonction $f : x \mapsto |x|$ est définie sur \mathbb{R} .

Est-elle dérivable sur l'ensemble de définition ?

Si on regarde la courbe représentative de la fonction f on voit qu'en 0 elle admet deux tangentes différentes.

Elle ne semble pas dérivable en 0



Étudions la dérivabilité en $x = 0$:

$$\text{Soit } h \neq 0 : \tau = \frac{f(h) - f(0)}{h} = \frac{|h|}{h}$$

Il y a donc deux cas possibles :

- Si $h > 0$ alors $\tau = \frac{h}{h} = 1$ et donc $\lim_{h \rightarrow 0} \tau = \lim_{h \rightarrow 0} 1 = 1$
- $h < 0$ alors $\tau = -1$ et donc $\lim_{h \rightarrow 0} \tau = \lim_{h \rightarrow 0} -1 = -1$

Il y a donc deux limites différentes, donc f n'est pas dérivable en 0

4 RÉCAPITULATIF DES DÉRIVÉES DES FONCTIONS DE RÉFÉRENCE

fonction définie et dérivable sur :	fonction f définie par :	fonction dérivée f' définie par :
\mathbb{R}	$f(x) = k$	$f'(x) = 0$
\mathbb{R}	$f(x) = ax + b$	a
\mathbb{R}	$f(x) = x^n$ (n entier $n \geq 1$)	$f'(x) = nx^{n-1}$
$] -\infty; 0[$ ou $]0; +\infty[$	$f(x) = \frac{1}{x}$	$f'(x) = -\frac{1}{x^2}$
$] -\infty; 0[$ ou $]0; +\infty[$	$f(x) = \frac{1}{x^n}$ (n entier $n \geq 1$)	$f'(x) = -\frac{n}{x^{n+1}}$
$]0; +\infty[$	$f(x) = \sqrt{x}$	$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$

APPLICATIONS

On note f la fonction définie sur \mathbb{R} par $f(x) = x^5$
alors f est dérivable sur \mathbb{R} et $f'(x) = 5x^4$

On note g la fonction définie sur \mathbb{R}^* par $g(x) = \frac{1}{x^2}$
alors g est dérivable sur \mathbb{R} et $g'(x) = -\frac{2}{x^3}$

5 DÉRIVÉES ET OPÉRATIONS

u et v sont deux fonctions dérivables sur un intervalle I

	fonction f définie par :	fonction dérivée f' :
Produit d'une fonction par un réel k	ku	ku'
Somme	$u + v$	$u' + v'$
Produit	$u \times v$	$u'v + uv'$
Quotient ($v \neq 0$ sur I)	$\frac{u}{v}$	$\frac{u'v - uv'}{v^2}$
Inverse ($v \neq 0$ sur I)	$\frac{1}{v}$	$-\frac{v'}{v^2}$

EXEMPLES

1. Produit de deux fonctions

Soit f la fonction définie sur $]0; +\infty[$ par $f(x) = \left(2 + \frac{x^2}{3}\right)\left(1 - \frac{2}{x}\right)$. Calculer $f'(x)$.

Sur $]0; +\infty[$ f est dérivable comme produit de deux fonctions dérivables.

$f = uv$ d'où $f' = u'v + uv'$. Avec pour tout réel x appartenant à l'intervalle $]0; +\infty[$,

$$u(x) = 2 + \frac{x^2}{3} \quad \text{d'où} \quad u'(x) = \frac{2x}{3}$$

$$v(x) = 1 - \frac{2}{x} \quad \text{d'où} \quad v'(x) = \frac{2}{x^2}$$

Soit pour tout réel x appartenant à l'intervalle $]0; +\infty[$,

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{2x}{3} \times \left(1 - \frac{2}{x}\right) + \frac{2}{x^2} \times \left(2 + \frac{x^2}{3}\right) \\ &= \frac{2x}{3} - \frac{4}{3} + \frac{4}{x^2} + \frac{2}{3} \\ &= \frac{2x^3 - 2x^2 + 6}{3x^2} \end{aligned}$$

Ainsi, f' est la fonction définie sur $]0; +\infty[$ par $f'(x) = \frac{2x^3 - 2x^2 + 6}{3x^2}$.

2. Quotient de deux fonctions

Soit f la fonction définie sur \mathbb{R} par $f(x) = \frac{4x-3}{x^2+1}$. Calculer $f'(x)$.

Sur \mathbb{R} , f est dérivable comme somme et quotient de deux fonctions dérivables.

$f = \frac{u}{v}$ d'où $f' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$. Avec pour tout réel x ,

$$\begin{aligned} u(x) &= 4x - 3 & \text{d'où} & \quad u'(x) = 4 \\ v(x) &= x^2 + 1 & \text{d'où} & \quad v'(x) = 2x \end{aligned}$$

Soit pour tout réel x ,

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{4(x^2+1) - 2x(4x-3)}{(x^2+1)^2} \\ &= \frac{4x^2+4-8x^2+6x}{(x^2+1)^2} \\ &= \frac{-4x^2+6x+4}{(x^2+1)^2} \end{aligned}$$

Ainsi, f' est la fonction définie sur \mathbb{R} par $f'(x) = \frac{-4x^2+6x+4}{(x^2+1)^2}$.

IV DÉRIVÉE ET VARIATIONS D'UNE FONCTION

1 THÉORÈME 1

Soit f une fonction dérivable et monotone sur un intervalle I de \mathbb{R} .

- Si f est constante sur I , alors pour tout réel x appartenant à I , $f'(x) = 0$.
- Si f est croissante sur I , alors pour tout réel x appartenant à I , $f'(x) \geq 0$.
- Si f est décroissante sur I , alors pour tout réel x appartenant à I , $f'(x) \leq 0$.

Le théorème suivant, permet de déterminer les variations d'une fonction sur un intervalle suivant le signe de sa dérivée.

2 THÉORÈME 2

Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I de \mathbb{R} et f' la dérivée de f sur I .

- Si f' est nulle sur I , alors f est constante sur I .
- Si f' est strictement positive sur I , sauf éventuellement en un nombre fini de points où elle s'annule, alors f est strictement croissante sur I .
- Si f' est strictement négative sur I , sauf éventuellement en un nombre fini de points où elle s'annule, alors f est strictement décroissante sur I .

3 THÉORÈME 3

Soit f une fonction dérivable sur un intervalle ouvert I de \mathbb{R} et x_0 un réel appartenant à I .

1. Si f admet un extremum local en x_0 , alors $f'(x_0) = 0$.
2. Si la dérivée f' s'annule en x_0 **en changeant de signe**, alors f admet un extremum local en x_0 .

x	a	x_0	b
$f'(x)$	-	0	+
$f(x)$			

x	a	x_0	b
$f'(x)$	+	0	-
$f(x)$			

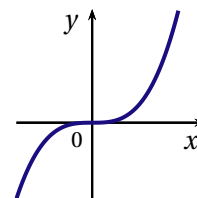
REMARQUES

1. Dans la proposition 2. du théorème 3 l'hypothèse **en changeant de signe** est importante.

Considérons la fonction cube définie sur \mathbb{R} par $f(x) = x^3$ qui a pour dérivée la fonction f' définie sur \mathbb{R} par $f'(x) = 3x^2$.

$f'(0) = 0$ et pour tout réel x non nul, $f'(x) > 0$.

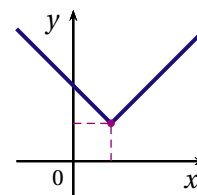
La fonction cube est strictement croissante sur \mathbb{R} et n'admet pas d'extremum en 0.



2. Une fonction peut admettre un extremum local en x_0 sans être nécessairement dérivable.

Considérons la fonction f définie sur \mathbb{R} par $f(x) = |x - 1| + 1$.

f est une fonction affine par morceaux, f admet un minimum $f(1) = 1$ or f n'est pas dérivable en 1.



POINT MÉTHODE

En pratique, pour étudier les variations d'une fonction f dérivable sur son ensemble de définition \mathcal{D}_f :

- on détermine la dérivée f' de f ;
- on étudie le signe de f' sur \mathcal{D}_f ;
- on applique le théorème 2 sur chacun des intervalles de \mathcal{D}_f où le signe de f' est constant ;
- on dresse le tableau des variations en indiquant les extremums, s'il y a lieu et éventuellement les limites aux bornes de son ensemble de définition.

4 EXERCICE DE SYNTHÈSE CORRIGÉ

Étudier les variations de la fonction f définie par $f(x) = \frac{2x^2 + 3x + 5}{x - 3}$ sur $\mathbb{R} \setminus \{3\}$

Rédaction :

Calculons sa fonction dérivée en utilisant la forme $f(x) = \frac{u(x)}{v(x)}$

On note $u(x) = 2x^2 + 3x + 5$ définie et dérivable sur \mathbb{R}

$v(x) = x - 3$ définie et dérivable sur \mathbb{R}

Alors $u'(x) = 4x + 3$ et $v'(x) = 1$

f est dérivable sur $\mathbb{R} \setminus \{3\}$ comme quotient de deux fonctions dérivables sur $\mathbb{R} \setminus \{3\}$

$$\text{et } f' = \left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$$

$$f'(x) = \frac{(4x+3)(x-3) - (2x^2+3x+5)(1)}{(x-3)^2} = \frac{2(x^2-6x-7)}{(x-3)^2}$$

Il faut donc étudier le signe de $x^2 - 6x - 7$ puisque $(x-3)^2$ est toujours positif.

$$\Delta = b^2 - 4ac = (-6)^2 - 4(-7)(1) = 36 + 28 = 64 = 8^2$$

donc $\Delta > 0$ et il y a deux racines réelles distinctes :

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{6+8}{2} = 7 \text{ et } x_2 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{6-8}{2} = -1$$

On obtient donc le tableau de variations suivant :

x	$-\infty$	-1	3	7	$+\infty$	
$f'(x)$	+	0	-	-	0	+
$f(x)$	↗ ↘ -1		↘ ↗ 28.5			

$$f(-1) = -1 \text{ et } f(7) = 28,5$$