Racine carrée

1 INTRODUCTION

1ÈRE SITUATION

On considère ce carré d'aire 9 cm^2

$$\boxed{\mathscr{A} = 9cm^2}$$

On cherche à déterminer la mesure c de son côté.
On doit résoudre : $c^2 = 9$
Comme c est une longueur, $c > 0$.

La solution est dont le nombre positif dont le carré vaut 9.
Intuitivement, on trouve 3, qui est le seul nombre positif vérifiant
$c^2 = 9$ et $c > 0$
$\iff c = 3$

2ÈME SITUATION

On considère ce carré d'aire 2 cm^2

$$\boxed{\mathscr{A} = 2cm^2}$$

On cherche à déterminer la mesure c de son côté.
On doit résoudre : $c^2 = 2$
Comme c est une longueur, $c > 0$.

La solution est dont le nombre positif dont le carré vaut 2.
On ne peut trouver intuitivement la solution de $c^2 = 2$
On a :

$$\begin{aligned} 1 &< c^2 < 4 \\ 1^2 &< c^2 < 2^2 \\ 1 &< c < 2 \end{aligned}$$

Mais intuitivement, on ne trouve pas facilement de solution.
A la calculatrice, avec un algorithme, on pourrait affiner la valeur de c.
On démontrer que le nombre positif c vérifiant $c^2 = 2$ est un irrationnel.
Pour l'écrire, la notation décimale et fractionnaire ne convient pas.
Il faut inventer une notation pour écrire ce nombre : $\sqrt{2}$.
$\sqrt{2}$ est donc le nombre positif dont la carré vaut 2.

2 DÉFINTION

Définition :
La racine carrée d'un réel positif x est le nombre positif noté $\sqrt{x}$ dont le carré est égal à x.

$$\text{Si } x \text{ est un réel positif alors } \sqrt{x}^{\,2} = x$$

Propriété :

$$\text{Pour tout réel positif } x,\ \sqrt{x^2} = x \text{ et } \sqrt{x} \geqslant 0$$

Remarques :

— D'après la définition, on ne peut pas caculer la racine carrée d'un ombre négatif.

— Les nombres dont la racine carrée est un entier sont les *carrés parfaits* ;
Il est utile de connaître les premiers :

$2^2 = \mathbf{4}$ donc $\sqrt{4} = 2$
$3^2 = \mathbf{9}$ donc $\sqrt{9} = 3$
$4^2 = \mathbf{16}$ donc $\sqrt{16} = 4$
$5^2 = \mathbf{25}$ donc $\sqrt{25} = 5$
$6^2 = \mathbf{36}$ donc $\sqrt{36} = 6$
$7^2 = \mathbf{49}$ donc $\sqrt{49} = 7$
$8^2 = \mathbf{64}$ donc $\sqrt{64} = 8$
$9^2 = \mathbf{81}$ donc $\sqrt{81} = 9$

$10^2 = \mathbf{100}$ donc $\sqrt{100} = 10$
$11^2 = \mathbf{121}$ donc $\sqrt{121} = 11$
$12^2 = \mathbf{144}$ donc $\sqrt{144} = 12$
$13^2 = \mathbf{169}$ donc $\sqrt{169} = 13$
$14^2 = \mathbf{196}$ donc $\sqrt{196} = 14$
$15^2 = \mathbf{225}$ donc $\sqrt{225} = 15$
$16^2 = \mathbf{256}$ donc $\sqrt{256} = 16$

— En général on ne peut écrire que des valeurs approchées des racines carrées sous forme décimale.
Ainsi : $\sqrt{2} \approx 1{,}414$ et $\sqrt{3} \approx 1{,}732$

3 PROPRIÉTÉS CALCULATOIRES DES PRODUITS ET QUOTIENTS DE RACINES CARRÉES :

Racine carrée et produits :

$$\text{Soit } a \geqslant 0 \text{ et } b \geqslant 0, \text{ on a } \quad \sqrt{a \times b} = \sqrt{a} \times \sqrt{b}$$

Démonstration :
On a d'après la propriété de cours : $\sqrt{a \times b} \geqslant 0$ et $\sqrt{a} \times \sqrt{b} \geqslant 0$
On va utiliser la propriété suivante, (*démontrée dans le cours sur la fonction carré*)

$$\text{Si } a \geqslant 0 \text{ et } b \geqslant 0, \text{ alors } a^2 = b^2 \iff a = b \qquad (P_2)$$

Si on prouve que $\sqrt{a \times b}^{\,2} = \left(\sqrt{a} \times \sqrt{b}\right)^2$ on aura montré $\sqrt{a \times b} = \sqrt{a} \times \sqrt{b}$
Or, d'après la définition d'une racine carrée, $\sqrt{a \times b}^{\,2} = a \times b$
D'autre part, $\left(\sqrt{a} \times \sqrt{b}\right)^2 = \sqrt{a}^{\,2} \times \sqrt{b}^{\,2} = a \times b$
On vient donc e montrer que $\sqrt{a \times b}^{\,2} = a \times b = \left(\sqrt{a} \times \sqrt{b}\right)^2$
Avec la propriété (P_2), on en déduit que : $\sqrt{a \times b} = \sqrt{a} \times \sqrt{b}$

Racine carrée et quotients :

$$\text{Soit } a \geqslant 0 \text{ et } b > 0, \text{ on a } \quad \sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$$

Démonstration :
Identique à celle du produit.

APPLICATION

$\sqrt{12}\times\sqrt{3}=\sqrt{12\times3}=\sqrt{36}=6$ et $\dfrac{\sqrt{125}}{\sqrt{5}}=\sqrt{\dfrac{125}{5}}=\sqrt{25}=5$

4 PROPRIÉTÉS CALCULATOIRES DE SOMMES DE RACINES CARRÉES

Racine carrée et sommes :

Soit $a\geqslant 0$ et $b\geqslant 0$, on a $\quad \sqrt{a+b}\leqslant\sqrt{a}+\sqrt{b}$

Démonstration :
L'idée est d'utiliser encore la propriété (P_2) :
Soit $a\geqslant 0$ et $b\geqslant 0$, on a d'après la définition de la racine carrée : $\left(\sqrt{a+b}\right)^2=a+b$
D'autre part, $\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}\right)^2=(\sqrt{a})^2+2\times\sqrt{a}\times\sqrt{b}+\left(\sqrt{b}\right)^2=a+2\times\sqrt{a}\times\sqrt{b}+b$
Comme $a+2\times\sqrt{a}\times\sqrt{b}+b\geqslant a+b$, on a montré que : $\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}\right)^2\geqslant\left(\sqrt{a+b}\right)^2$
Or, d'après la propriété (P_2) : $\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}\right)^2\geqslant\left(\sqrt{a+b}\right)^2 \iff \sqrt{a}+\sqrt{b}\geqslant\sqrt{a+b}$

Exemple :
$\sqrt{9+16}=\sqrt{25}=5$ et $\sqrt{9}+\sqrt{16}=3+4=7$
On a bien : $\sqrt{9+16}\leqslant\sqrt{9}+\sqrt{16}$

5 METTRE UNE RACINE CARRÉE SOUS LA FORME $a\sqrt{b}$

Réduction d'une racine carrée :
Méthode :
Pour réduire une racine carrée, il faut déterminer le plus grand grand carré parfait diviseur du nombre placé sous le symbole radical puis utiliser la propriété des produits.

Exemple :
$\sqrt{72}=\sqrt{36\times2}=\sqrt{36}\times\sqrt{2}=6\sqrt{2}$

Application :
Simplifier l'écriture de : $\sqrt{72}=\sqrt{36\times2}=\sqrt{36}\times\sqrt{2}=6\sqrt{2}$

6 SIMPLIFIER DES SOMMES DE RACINES CARRÉES

Application 1 :
Simplifier l'écriture de : $\sqrt{7}+3\sqrt{7}-4=(3+1)\sqrt{7}-4=4\sqrt{7}-4$

Application 2 :
Simplifier l'écriture de :

$$\begin{aligned}\sqrt{7}+3\sqrt{28}-4\sqrt{343} &= \sqrt{7}+3\sqrt{4\times 7}-4\sqrt{49\times 7}\\ &= \sqrt{7}+3\times\sqrt{4}\times\sqrt{7}-4\sqrt{49}\times\sqrt{7}\\ &= \sqrt{7}+3\times 2\times\sqrt{7}-4\times 7\times\sqrt{7}\\ &= \sqrt{7}+6\sqrt{7}-28\sqrt{7}\\ &= -21\sqrt{7}\end{aligned}$$

7 RENDRE UN DÉNOMINATEUR ENTIER

Principe :
Les nombres irrationnels n'ayant ni écriture décimale, ni fractionnaire, par commodité de calcul pour la division, on essaie de donner toujours un résultat en écriture fractionnaire avec un dénominateur entier.

Exemples :
$\dfrac{\sqrt{2}}{3}$ est acceptable puisque 3 est un entier, alors que $\dfrac{3}{\sqrt{2}}$ ne l'est pas puisque le $\sqrt{2}$ n'est pas un entier.

Application :

Rendre entier le dénominateur de : $\dfrac{3}{\sqrt{3}}=\dfrac{3\times\sqrt{3}}{(\sqrt{3})^2}=\dfrac{3\times\sqrt{3}}{3}=\sqrt{3}$

Application approfondissements :
Rendre entier le dénominateur de :

$$\begin{aligned}\frac{3}{1+\sqrt{3}} &= \frac{3\times(1-\sqrt{3})}{(1+\sqrt{3})(1-\sqrt{3})}\\ &= \frac{3\times(1-\sqrt{3})}{1^2-\sqrt{3}^2}\\ &= \frac{3\times(1-\sqrt{3})}{-2}\\ &= \frac{3}{2}\times(\sqrt{3}-1)\end{aligned}$$

On dit que $1-\sqrt{3}$ est la *quantité conjuguée* de $1+\sqrt{3}$