Généralités avec les fonctions et fonctions de références

I NOTION DE FONCTION : VIDÉO 1

1 FONCTION

Définir une fonction f sur un ensemble $\mathscr{D}$ de nombres réels, c'est associer à chaque nombre $x \in \mathscr{D}$ un ……… nombre réel noté $f(x)$. On note :

$$f : \mathscr{D} \to \mathbb{R}$$
$$x \mapsto f(x)$$

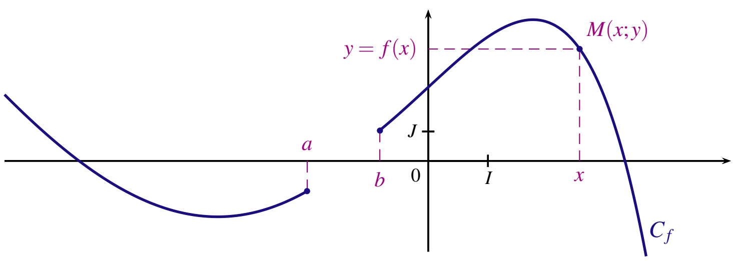
— $\mathscr{D}$ est l'ensemble de définition de la fonction f. x est la ……… .
— Le nombre $f(x)$ est l'……… du réel x par la fonction f.
— Quand on sait que $f(x) = y$, on dit que x est un ……… de y par la fonction f.

Exemple

f est la fonction définie sur l'intervalle $[0;+\infty[$ par $f(x) = \sqrt{x}$.
— ……… ……… ……… de la fonction f est l'intervalle $[0;+\infty[$.
— L'image de 9 par la fonction f est ……… ………
— 9 est l'antécédent de ……… par la fonction f.

2 COURBE REPRÉSENTATIVE

Soit f une fonction définie sur un ensemble $\mathscr{D}$ de nombres réels.
La courbe représentative de la fonction f dans le plan muni d'un repère, est l'ensemble des points $M(x;y)$ du plan tels que $\begin{cases} \dots\dots\dots \quad \dots\dots\dots \\ \dots\dots\dots \quad \dots\dots\dots \end{cases}$.



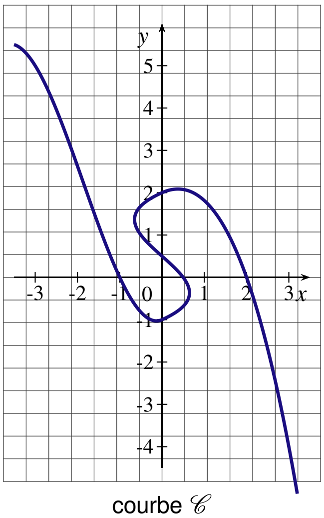
C_f est la courbe représentative d'une fonction f définie sur $\mathscr{D} =]-\infty;a] \cup [b;+\infty[$

Remarque :

Comme chaque antécédent……… ……… ……… ……… par la fonction, il ne peut pas exister deux points de la courbe avec la même abscisse.
Une telle représentation graphique peut exister.
Mais elle n'est pas celle d'une fonction.

Illustration :
Cette courbe . . . .

Plusieurs points ont par exemple pour abscisse 0.



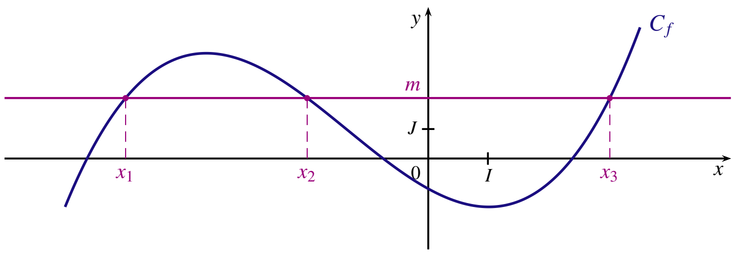
courbe $\mathscr{C}$

3 RÉSOLUTION GRAPHIQUE D'ÉQUATION ET D'INÉQUATION

Soient C_f la représentative d'une fonction f et m un réel.

— Les solutions de l'équation $f(x) = m$ . . . .

— Les solutions de l'inéquation $f(x) < m$ (respectivement $f(x) > m$) sont . . . .



L'ensemble des solutions de l'équation $f(x) = m$ est $\mathscr{S} = \{x_1; x_2; x_3\}$
L'ensemble des solutions de l'inéquation $f(x) \leqslant m$ est $\mathscr{S} =]-\infty; x_1] \cup [x_2; x_3]$

4 VARIATIONS : VIDÉO 2

FONCTION CROISSANTE

Dire que la fonction f est croissante sur un intervalle I signifie que pour tous réels x_1 et x_2 de I.

Si $x_1 \leqslant x_2$ alors . . . .

On dit que la fonction f . . . . :

Les réels de l'intervalle I et leurs images par f sont rangés dans le même ordre.

FONCTION DÉCROISSANTE

Dire que la fonction f est décroissante sur un intervalle I signifie que pour tous réels x_1 et x_2 de I.

Si $x_1 \leqslant x_2$ alors ……… ………

On dit que la fonction f ……… ……… :

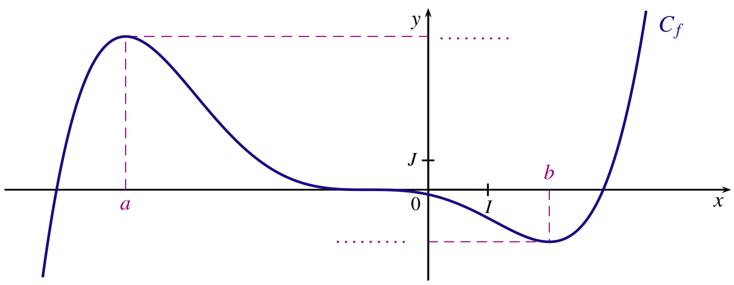
Les réels de l'intervalle I et leurs images par f sont rangés dans un ordre contraire.

FONCTION CONSTANTE

Dire que la fonction f est constante sur un intervalle I signifie que pour tout réel x appartenant à I.

……… ……… où k est un réel.

TABLEAU DE VARIATION



On résume les variations de la fonction f à l'aide du tableau de variation suivant :

x	$-\infty$		a		b		$+\infty$
$f(x)$		↗	………	↘	………	↗	

EXTREMUM

— Dire que la fonction f admet un ……… ……… en a sur un intervalle I signifie que pour tout réel x appartenant à I, $f(x) \leqslant f(a)$.

— Dire que la fonction f admet un ……… ……… en a sur un intervalle I signifie que pour tout réel x appartenant à I, $f(x) \geqslant f(a)$.

Dans l'exemple précédent : M est le ……… ……… de la fonction f sur l'intervalle $]-\infty; b]$ atteint pour $x = a$;
m est le ……… ……… de la fonction f sur l'intervalle $[a; +\infty[$ atteint pour $x = b$.

II FONCTIONS DE RÉFÉRENCE

1 FONCTION AFFINE VIDÉO 3

DÉFINITION

Soit a et b deux réels.
La fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par .... est une fonction affine.

Cas particuliers :

— Dans le cas où $b=0$, la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=ax$ est appelée fonction ....
— Dans le cas où $a=0$, la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=b$ est une fonction ....

PROPORTIONNALITÉ DES ACCROISSEMENTS

f est une fonction affine si, et seulement si, pour tous nombres réels distincts, on a :

....
....

VARIATION

Soit a et b deux réels.

— Si a est positif, la fonction affine f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=ax+b$ est ....
— Si a est négatif, la fonction affine f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=ax+b$ est ....

SIGNE DE $ax+b$ AVEC $a \neq 0$

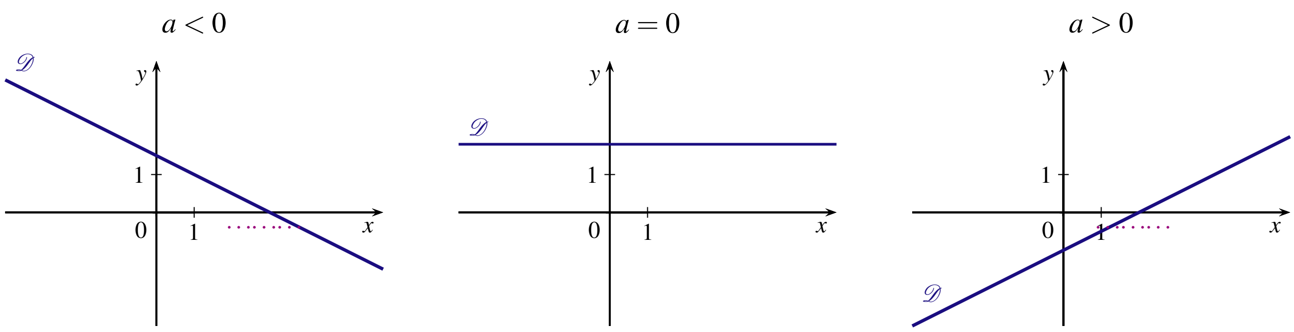
Soit f la fonction affine définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=ax+b$ avec $a \neq 0$.
$f(x)$ est du signe de a pour les valeurs de x supérieures à ....

Par conséquent, si $a \neq 0$:

x	$-\infty$		$-\frac{b}{a}$		$+\infty$
$f(x)=ax+b$		....	0	....	

COURBE REPRÉSENTATIVE

Soit a et b deux réels.
La courbe représentative de la fonction affine f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=ax+b$ est la droite $\mathscr{D}$ d'équation ....



INÉQUATIONS

Pour résoudre une inéquation à une inconnue on peut être amené à étudier le signe d'une expression.

Résoudre $A(x) \leqslant B(x)$ équivaut à résoudre $A(x) - B(x) \leqslant 0$.

TABLEAU DE SIGNES D'UN PRODUIT

Pour étudier le signe d'un produit :

EXEMPLE

Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation $(2x+3)^2 \leqslant (3x-1)^2$
Pour tout réel x,

On étudie les signe de chacun des facteurs du produit : ……… ……… ……… ………

On résume dans un seul tableau le signe de chacun des facteurs et, on en déduit le signe du produit en utilisant la règle des signes d'un produit :

x	$-\infty$		………		………		$+\infty$
………			0				
………					0		
……… ………			0		0		

L'ensemble des solutions de l'inéquation :

……… ………
……… ………
……… ………

ÉTUDE DU SIGNE D'UN QUOTIENT (VIDÉO 4)

Méthode pour construire le tableau de signes d'un quotient :

Pour étudier le signe d'un quotient :

- On cherche les valeurs qui annulent le dénominateur (……… ………).
- On regroupe dans un ……… ………
- On utilise la règle des signes pour remplir la dernière ligne.

EXEMPLE

Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation $\dfrac{2x+7}{3x+2} \geqslant 2$

Le quotient $\dfrac{2x+7}{3x+2}$ est défini pour tout réel x tel que le dénominateur $3x+2 \neq 0$.

……… ……… ………

, le quotient $\dfrac{2x+7}{3x+2}$ est défini pour tout réel ……… ………

Étudions le signe du quotient $\dfrac{3-4x}{3x+2}$ à l'aide d'un tableau de signe. On étudie les signe de chacun des termes

du quotient : On résume dans un seul tableau le signe de chacun des termes et, on en déduit le signe du quotient en utilisant ……… ………

La ……… ……… dans le tableau indique que $-\dfrac{2}{3}$ est une valeur interdite :

x	$-\infty$		………		………		$+\infty$
$3-4x$			|		0		
$3x+2$			0		|		
$\dfrac{3-4x}{3x+2}$			||		0		

L'ensemble des solutions de l'inéquation $\dfrac{3-4x}{3x+2} \geqslant 0$ est

$S =$ ……… ……… .

2 FONCTION CARRÉ (VIDÉO 6)

DÉFINITION

On appelle fonction carré, la fonction qui à tout réel x fait correspondre le nombre par ………

EXEMPLES

Soit f la fonction définie pour tout x de $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2$
Calculer :
$f(2) = \cdots = \ldots$; $f(-3) = \cdots = \ldots$; $f(0) = \cdots = \ldots$

REMARQUES

- Quel est l'image de 3 par la fonction carrée ? ……… ………
- 4 a-t-il un ou des antécédents ? Si oui, lesquels ? ……… ………
- 3 a-t-il un ou des antécédents ? Si oui, lesquels ? ……… ………
- -1 a-t-il un ou des antécédents ? Si oui, lesquels ? ……… ……… ………

PREMIÈRE PROPRIÉTÉ :

— Un carré est toujours positif ou nul. Pour tout réel x, on a ………………
— Un nombre et son opposé ont le même carré. Pour tout réel x, on a ………………
— Comme pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a : $f(x) = f(-x)$, on dit que la fonction f ……… .
Sa représentation graphique admet l'axe des ordonnées comme ……… ………

VARIATIONS DE LA FONCTION CARRÉ

La fonction carré définie pour tout réel x par $f(x) = x^2$ est ……… ……… sur $]-\infty;0]$
et ……… ……… sur $[0;+\infty[$

TABLEAU DES VARIATIONS DE LA FONCTION CARRÉ

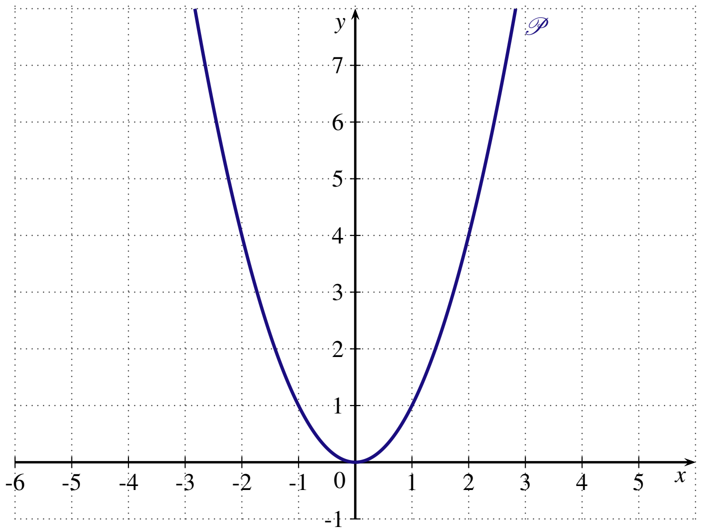
x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f(x)$			

CONSÉQUENCES

— Deux nombres négatifs et leurs carrés sont rangés dans l'ordre ……… ……… .
Si $a \leqslant b \leqslant 0$ alors ………
— Deux nombres positifs et leurs carrés sont rangés ……………… .
Si $0 \leqslant a \leqslant b$ alors ………

COURBE REPRÉSENTATIVE

La courbe représentative de la fonction carré f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2$ est ……… ………
$\mathscr{P}$ d'équation $y = x^2$.



3 FONCTION INVERSE (VIDEO 7)

DÉFINITION

La fonction inverse est la fonction f définie pour tout réel $x \neq 0$ par . . . .

ENSEMBLE DE DÉFINITION

L'ensemble de définition de la fonction inverse est l'ensemble des réels non nuls . . . . , c'est la réunion de deux intervalles . . . .

VARIATIONS DE LA FONCTION INVERSE

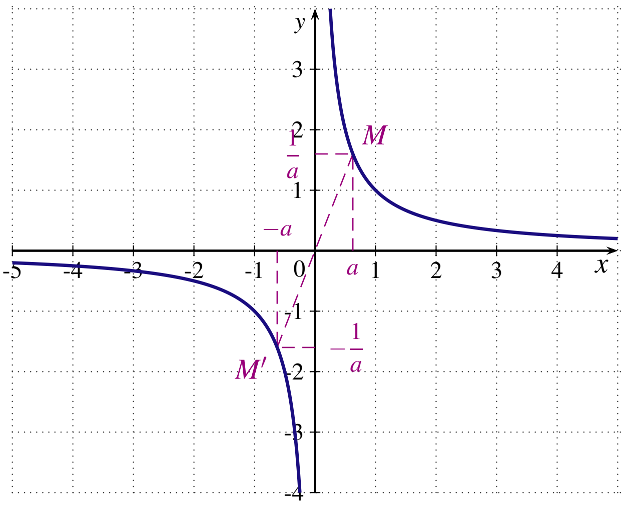
La fonction inverse est strictement . . . . sur chacun des intervalles où elle est définie.

TABLEAU DES VARIATIONS DE LA FONCTION INVERSE

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f(x)$		‖	

COURBE REPRÉSENTATIVE

La courbe représentative de la fonction inverse est . . . . d'équation $y = \dfrac{1}{x}$.



REMARQUES :

— Pour tout réel $a \neq 0$, $f(-a) = \dots\dots\dots \quad \dots\dots\dots$
On dit que la fonction f est. . . . .

Les points $M(a; f(a))$ et $M'(-a; f(-a))$ sont symétriques par rapport à . . . .
L'hyperbole admet . . . . du repère comme centre de symétrie.

— On peut rendre $f(x) = \dfrac{1}{x}$ aussi grand que l'on veut, pourvu que x soit suffisamment proche de 0 et positif.
On peut rendre $f(x) = \dfrac{1}{x}$ aussi proche de 0 que l'on veut, pourvu que x soit suffisamment grand.
Graphiquement, l'hyperbole se rapproche de l'axe des abscisses lorsque x tend vers $+\infty$ (ou vers $-\infty$) , et de l'axe des ordonnées lorsque x se rapproche de 0.
On dit que l'hyperbole a pour . . . . les axes du repère.

4 FONCTION RACINE CARRÉE (VIDEO 8)

DÉFINITION 1

Soit a un réel positif. Le nombre $\sqrt{a}$ est le seul réel positif dont . . . .

DÉFINITION 2

La fonction racine carrée est la fonction f définie pour tout réel x appartenant à l'intervalle . . . . par $f(x) = \dots\dots\dots$.

REMARQUE

Il ne faut pas confondre $(\sqrt{x})^2$ et $\sqrt{x^2}$:

— $(\sqrt{x})^2 = \dots\dots\dots$ seulement pour . . . .

— $\begin{cases} \text{Si } x \geqslant 0, \text{ alors } \sqrt{x^2} = \dots\dots\dots \\ \text{Si } x \leqslant 0, \text{ alors } -x \geqslant 0, \text{ d'où } \sqrt{x^2} = \dots\dots\dots \end{cases}$

EXEMPLE

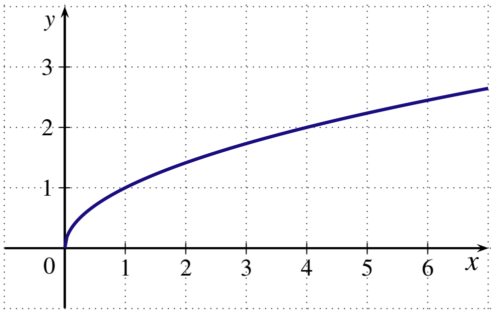
. . . .

VARIATIONS DE LA FONCTION RACINE CARRÉE

La fonction racine carrée définie pour tout réel x positif par $f(x) = \sqrt{x}$ est strictement ……… ……… .

Démonstration :

COURBE REPRÉSENTATIVE



Résoudre une équation irrationnelle :

On utilise le fait que l'égalité $\sqrt{a} = b$ équivaut à ……… ………

Exemple : Résoudre l'équation $\sqrt{x-1} = 2$. **(Vidéo 9)**

Résoudre une inéquation avec racines carrées :

On utilise le fait que l'égalité $\sqrt{a} < b$ équivaut à ……… .

Exemple : Résoudre l'inéquation $\sqrt{x} \geq 10^{-3}$.**(Vidéo 10)**

5 FONCTION CUBE : (VIDÉO 11)

DÉFINITION

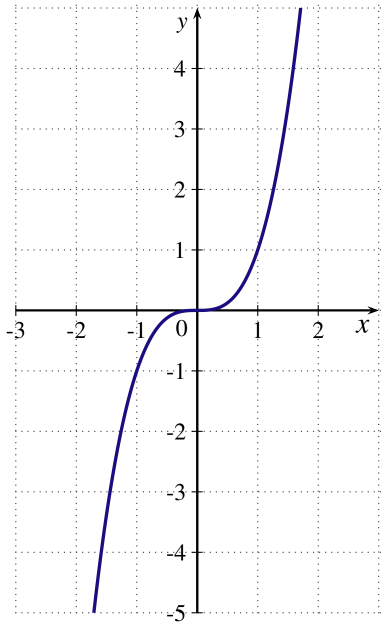
La fonction cube est la fonction f définie pour tout réel x par dans ………

VARIATIONS DE LA FONCTION CUBE

La fonction cube est strictement . . . . sur $\mathbb{R}$.

Démonstration :

COURBE REPRÉSENTATIVE



6 POSITION RELATIVE DE COURBES D'ÉQUATION $y = x$; $y = x^2$ ET $y = x^3$

— Pour tout nombre réel x de l'intervalle . . . .
— Pour tout nombre réel x de l'intervalle . . . .

Démonstration :

1er cas : On suppose que $0 \leq x \leq 1$.

2nd cas : On suppose que $1 \leq x$.

Synthèse des représentation graphique des fonctions de références étudiées en seconde

: