Généralités avec les fonctions et fonctions de références

I NOTION DE FONCTION

1 FONCTION

Définir une fonction f sur un ensemble $\mathscr{D}$ de nombres réels, c'est associer à chaque nombre $x \in \mathscr{D}$ un **unique** nombre réel noté $f(x)$. On note :

$$\begin{aligned} f : \mathscr{D} &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto f(x) \end{aligned}$$

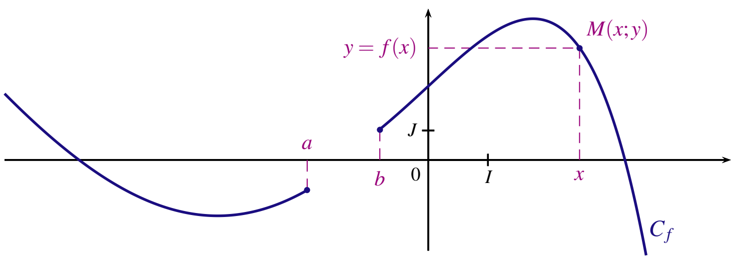
— $\mathscr{D}$ est l'ensemble de définition de la fonction f. x est la variable.
— Le nombre $f(x)$ est l'image du réel x par la fonction f.
— Quand on sait que $f(x) = y$, on dit que x est un antécédent de y par la fonction f.

Exemple

f est la fonction définie sur l'intervalle $[0;+\infty[$ par $f(x) = \sqrt{x}$.
— L'ensemble de définition de la fonction f est l'intervalle $[0;+\infty[$.
— L'image de 9 par la fonction f est $f(9) = \sqrt{9} = 3$.
— 9 est l'antécédent de 3 par la fonction f.

2 COURBE REPRÉSENTATIVE

Soit f une fonction définie sur un ensemble $\mathscr{D}$ de nombres réels.
La courbe représentative de la fonction f dans le plan muni d'un repère, est l'ensemble des points $M(x;y)$ du plan tels que $\begin{cases} x \in \mathscr{D} \\ y = f(x) \end{cases}$.

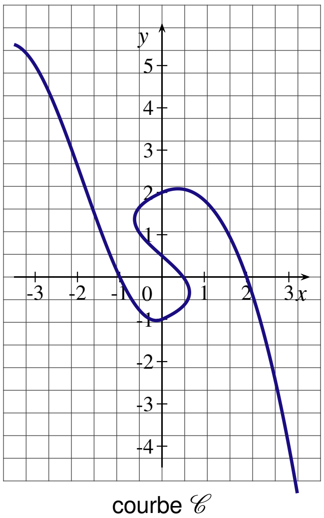


C_f est la courbe représentative d'une fonction f définie sur $\mathscr{D} =]-\infty;a] \cup [b;+\infty[$

Remarque :

Comme chaque antécédent n'a qu'une seule image par la fonction, il ne peut pas exister deux points de la courbe avec la même abscisse.
Une telle représentation graphique peut exister.
Mais elle n'est pas celle d'une fonction.

Illustration :
Cette courbe n'est pas la représentation graphique d'une fonction. Plusieurs points ont par exemple pour abscisse 0.



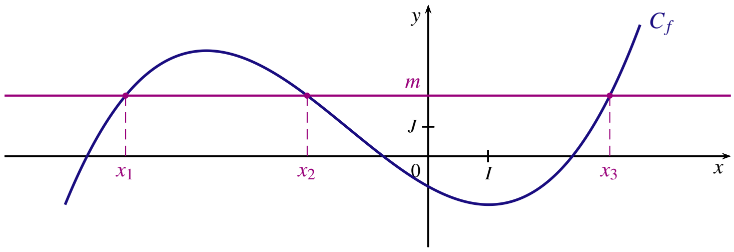
courbe $\mathscr{C}$

3 RÉSOLUTION GRAPHIQUE D'ÉQUATION ET D'INÉQUATION

Soient C_f la courbe représentative d'une fonction f et m un réel.

— Les solutions de l'équation $f(x) = m$ sont les abscisses des points de la courbe C_f d'ordonnée m.

— Les solutions de l'inéquation $f(x) < m$ (respectivement $f(x) > m$) sont les abscisses des points de la courbe C_f dont l'ordonnée est inférieure à m (respectivement supérieure à m)



L'ensemble des solutions de l'équation $f(x) = m$ est $\mathscr{S} = \{x_1;x_2;x_3\}$
L'ensemble des solutions de l'inéquation $f(x) \leqslant m$ est $\mathscr{S} =]-\infty;x_1] \cup [x_2;x_3]$

4 VARIATIONS

FONCTION CROISSANTE

Dire que la fonction f est croissante sur un intervalle I signifie que pour tous réels x_1 et x_2 de I.

$$\text{Si } x_1 \leqslant x_2 \text{ alors } f(x_1) \leqslant f(x_2)$$

On dit que la fonction f conserve l'ordre : les réels de l'intervalle I et leurs images par f sont rangés dans le même ordre.

FONCTION DÉCROISSANTE

Dire que la fonction f est décroissante sur un intervalle I signifie que pour tous réels x_1 et x_2 de I.

$$\text{Si } x_1 \leqslant x_2 \text{ alors } f(x_1) \geqslant f(x_2)$$

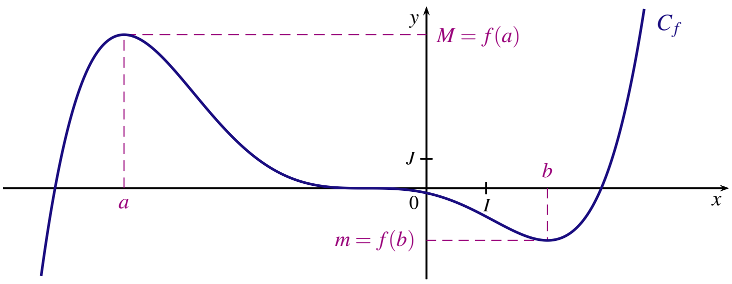
On dit que la fonction f change l'ordre : les réels de l'intervalle I et leurs images par f sont rangés dans un ordre contraire.

FONCTION CONSTANTE

Dire que la fonction f est constante sur un intervalle I signifie que pour tout réel x appartenant à I.

$$f(x) = k \text{ où } k \text{ est un réel.}$$

TABLEAU DE VARIATION



On résume les variations de la fonction f à l'aide du tableau de variation suivant :

x	$-\infty$	a	b	$+\infty$
$f(x)$	↗	M	↘ m	↗

EXTREMUM

- Dire que la fonction f admet un maximum en a sur un intervalle I signifie que pour tout réel x appartenant à I, $f(x) \leqslant f(a)$.
- Dire que la fonction f admet un minimum en a sur un intervalle I signifie que pour tout réel x appartenant à I, $f(x) \geqslant f(a)$.

Dans l'exemple précédent : M est le maximum de la fonction f sur l'intervalle $]-\infty; b]$ atteint pour $x = a$;
m est le minimum de la fonction f sur l'intervalle $[a; +\infty[$ atteint pour $x = b$.

II FONCTIONS DE RÉFÉRENCE

1 FONCTION AFFINE

DÉFINITION

Soit a et b deux réels.
La fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = ax + b$ est une fonction affine.

Cas particuliers :

- Dans le cas où $b = 0$, la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = ax$ est appelée fonction linéaire.
- Dans le cas où $a = 0$, la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = b$ est une fonction constante.

PROPORTIONNALITÉ DES ACCROISSEMENTS

f est une fonction affine si, et seulement si, pour tous nombres réels distincts, on a :

$$\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}=a$$

VARIATION

Soit a et b deux réels.

— Si a est positif, la fonction affine f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=ax+b$ est croissante.

— Si a est négatif, la fonction affine f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=ax+b$ est décroissante.

SIGNE DE $ax+b$ AVEC $a\neq 0$

Soit f la fonction affine définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=ax+b$ avec $a\neq 0$.
$f(x)$ est du signe de a pour les valeurs de x supérieures à $-\dfrac{b}{a}$.

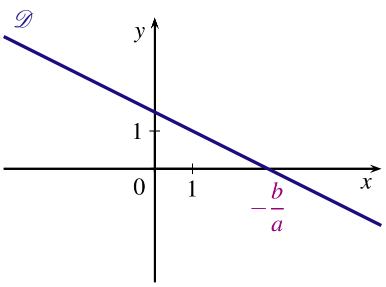
Par conséquent, si $a\neq 0$:

x	$-\infty$		$-\dfrac{b}{a}$		$+\infty$
$f(x)=ax+b$		signe de $-a$	0	signe de a	

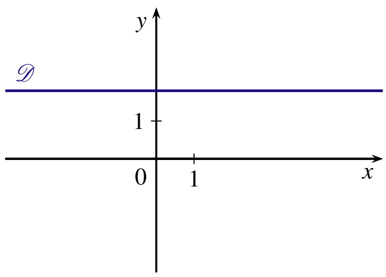
COURBE REPRÉSENTATIVE

Soit a et b deux réels.
La courbe représentative de la fonction affine f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=ax+b$ est la droite $\mathscr{D}$ d'équation $y=ax+b$.

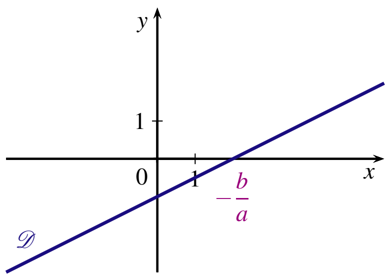
$a<0$



$a=0$



$a>0$



INÉQUATIONS

Pour résoudre une inéquation à une inconnue on peut être amené à étudier le signe d'une expression.

Résoudre $A(x)\leqslant B(x)$ équivaut à résoudre $A(x)-B(x)\leqslant 0$.

TABLEAU DE SIGNES D'UN PRODUIT

Pour étudier le signe d'un produit :

EXEMPLE

Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation $(2x+3)^2 \leqslant (3x-1)^2$
Pour tout réel x,

$$\begin{aligned}(2x+3)^2 \leqslant (3x-1)^2 &\Leftrightarrow (2x+3)^2-(3x-1)^2 \leqslant 0\\ &\Leftrightarrow [(2x+3)+(3x-1)]\times[(2x+3)-(3x-1)] \leqslant 0\\ &\Leftrightarrow (2x+3+3x-1)(2x+3-3x+1) \leqslant 0\\ &\Leftrightarrow (5x+2)(4-x) \leqslant 0\end{aligned}$$

Étudions le signe du produit $(5x+2)(4-x)$ à l'aide d'un tableau de signe.
On étudie les signe de chacun des facteurs du produit :

$$5x+2 \leqslant 0 \Leftrightarrow x \leqslant -\frac{2}{5} \qquad \text{et} \qquad 4-x \leqslant 0 \Leftrightarrow x \geqslant 4$$

On résume dans un seul tableau le signe de chacun des facteurs et, on en déduit le signe du produit en utilisant la règle des signes d'un produit :

x	$-\infty$		$-\frac{2}{5}$		4		$+\infty$
$5x+2$		$-$	0	$+$	|	$+$	
$4-x$		$+$	|	$+$	0	$-$	
$(5x+2)(4-x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	

L'ensemble des solutions de l'inéquation $(5x+2)(4-x) \leqslant 0$ est $S = \left]-\infty; -\frac{2}{5}\right] \cup \left[4; +\infty\right[$.

ÉTUDE DU SIGNE D'UN QUOTIENT

Méthode pour construire le tableau de signes d'un quotient :

Pour étudier le signe d'un quotient :

— On cherche les valeurs qui annulent le dénominateur (valeurs interdites).
— On regroupe dans un tableau le signe de chaque terme.
— On utilise la règle des signes pour remplir la dernière ligne.

EXEMPLE

Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation $\dfrac{2x+7}{3x+2} \geqslant 2$
Le quotient $\dfrac{2x+7}{3x+2}$ est défini pour tout réel x tel que le dénominateur $3x+2 \neq 0$.

Comme $3x+2 \neq 0 \Leftrightarrow x \neq -\frac{2}{3}$, le quotient $\frac{2x+7}{3x+2}$ est défini pour tout réel $x \neq -\frac{2}{3}$:

$$\begin{aligned}\frac{2x+7}{3x+2} \geqslant 2 &\Leftrightarrow \frac{2x+7}{3x+2} - 2 \geqslant 0\\ &\Leftrightarrow \frac{(2x+7)-2\times(3x+2)}{3x+2} \geqslant 0\\ &\Leftrightarrow \frac{2x+7-6x-4}{3x+2} \geqslant 0\\ &\Leftrightarrow \frac{3-4x}{3x+2} \geqslant 0\end{aligned}$$

Étudions le signe du quotient $\frac{3-4x}{3x+2}$ à l'aide d'un tableau de signe.
On étudie les signe de chacun des termes du quotient :

$$3-4x \leqslant 0 \Leftrightarrow x \geqslant \frac{3}{4} \qquad \text{et} \qquad 3x+2 \leqslant 0 \Leftrightarrow x \leqslant -\frac{2}{3}$$

On résume dans un seul tableau le signe de chacun des termes et, on en déduit le signe du quotient en utilisant la règle des signes d'un quotient.
La double barre dans le tableau indique que $-\frac{2}{3}$ est une valeur interdite :

x	$-\infty$		$-\frac{2}{3}$		$\frac{3}{4}$		$+\infty$
$3-4x$		$+$	|	$+$	0	$-$	
$3x+2$		$-$	0	$+$	|	$+$	
$\frac{3-4x}{3x+2}$		$-$	||	$+$	0	$-$	

L'ensemble des solutions de l'inéquation $\frac{3-4x}{3x+2} \geqslant 0$ est $S = \left]-\frac{2}{3};\frac{3}{4}\right]$.

2 FONCTION CARRÉ

DÉFINITION

On appelle fonction carré, la fonction qui à tout réel x fait correspondre le nombre par x^2

EXEMPLES

Soit f la fonction définie pour tout x de $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2$
Calculer :
$f(2) = \dots = \dots$
$f(-3) = \dots = \dots$
$f(0) = \dots = \dots$

REMARQUES

- Quel est l'image de 3 par la fonction carrée ?
- 4 a-t-il un ou des antécédents ? Si oui, lesquels ?
- 3 a-t-il un ou des antécédents ? Si oui, lesquels ?
- -1 a-t-il un ou des antécédents ? Si oui, lesquels ? PROPRIÉTÉS

PREMIÈRE PROPRIÉTÉ :

- Un carré est toujours positif ou nul. Pour tout réel x, on a $x^2 \geqslant 0$.
- Un nombre et son opposé ont le même carré. Pour tout réel x, on a $x^2 = (-x)^2$.

VARIATIONS DE LA FONCTION CARRÉ

La fonction carré définie pour tout réel x par $f(x) = x^2$ est décroissante sur $]-\infty;0]$ et croissante sur $[0;+\infty[$

TABLEAU DES VARIATIONS DE LA FONCTION CARRÉ

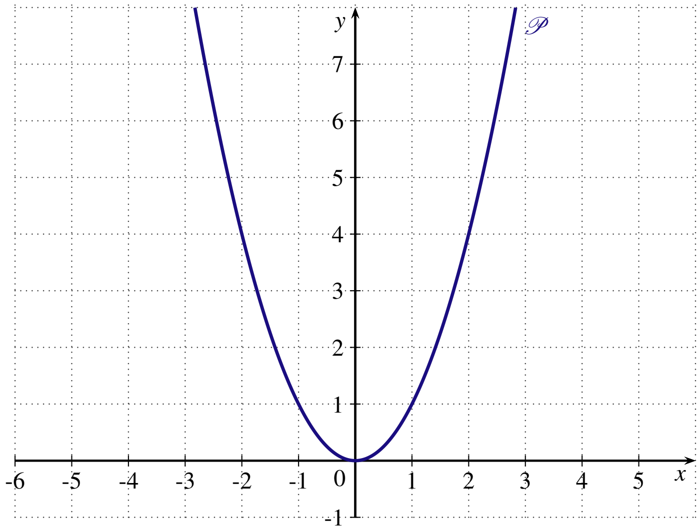
x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f(x)$	↘	0	↗

CONSÉQUENCES

- Deux nombres négatifs et leurs carrés sont rangés dans l'ordre contraire. Si $a \leqslant b \leqslant 0$ alors $a^2 \geqslant b^2$
- Deux nombres positifs et leurs carrés sont rangés dans le même ordre. Si $0 \leqslant a \leqslant b$ alors $a^2 \leqslant b^2$

COURBE REPRÉSENTATIVE

La courbe représentative de la fonction carré f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2$ est la parabole $\mathscr{P}$ d'équation $y = x^2$.



REMARQUE :

Si $0 \leqslant a \leqslant 1$ alors $a^2 \leqslant a$.
Sur l'intervalle $[0;1]$, la parabole $\mathscr{P}$ d'équation $y = x^2$ est au dessous de la droite $\mathscr{D}$ d'équation $y = x$.

3 FONCTION INVERSE

DÉFINITION

La fonction inverse est la fonction f définie pour tout réel $x \neq 0$ par $f(x) = \dfrac{1}{x}$.

ENSEMBLE DE DÉFINITION

L'ensemble de définition de la fonction inverse est l'ensemble des réels non nuls noté $\mathbb{R}^*$, c'est la réunion de deux intervalles $]-\infty;0[\cup]0;+\infty[$

VARIATIONS DE LA FONCTION INVERSE

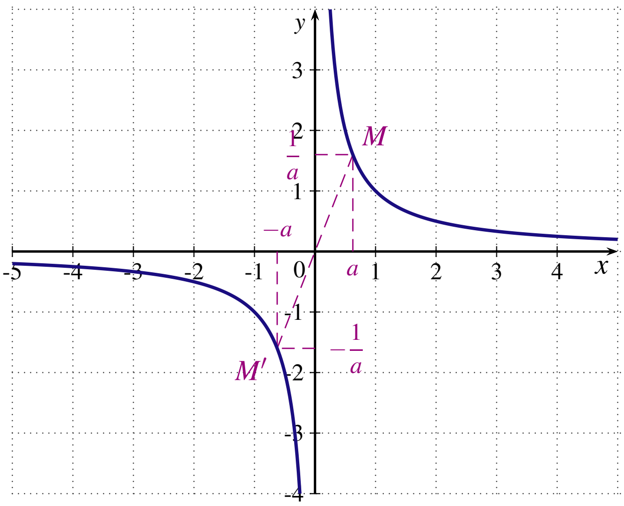
La fonction inverse est strictement décroissante sur chacun des intervalles où elle est définie.

TABLEAU DES VARIATIONS DE LA FONCTION INVERSE

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f(x)$	↘	‖	↘

COURBE REPRÉSENTATIVE

La courbe représentative de la fonction inverse est l'hyperbole d'équation $y = \dfrac{1}{x}$.



REMARQUES :

- Pour tout réel $a \neq 0$, $f(-a) = -\dfrac{1}{a} = -f(a)$.
  Les points $M(a; f(a))$ et $M'(-a; f(-a))$ sont symétriques par rapport à l'origine du repère.
  L'hyperbole admet l'origine du repère comme centre de symétrie.
- On peut rendre $f(x) = \dfrac{1}{x}$ aussi grand que l'on veut, pourvu que x soit suffisamment proche de 0 et positif.
  On peut rendre $f(x) = \dfrac{1}{x}$ aussi proche de 0 que l'on veut, pourvu que x soit suffisamment grand.
  Graphiquement, l'hyperbole se rapproche de l'axe des abscisses lorsque x tend vers $+\infty$ (ou vers $-\infty$) , et de l'axe des ordonnées lorsque x se rapproche de 0.
  On dit que l'hyperbole a pour asymptotes les axes du repère.

4 FONCTION RACINE CARRÉE

DÉFINITION 1

Soit a un réel positif. Le nombre $\sqrt{a}$ est le seul réel positif dont le carré est a.

DÉFINITION 2

La fonction racine carrée est la fonction f définie pour tout réel x appartenant à l'intervalle $[0;+\infty[$ par $f(x) = \sqrt{x}$.

REMARQUE

Il ne faut pas confondre $(\sqrt{x})^2$ et $\sqrt{x^2}$:

— $(\sqrt{x})^2 = x$ seulement pour $x \geqslant 0$.

— $\begin{cases} \text{Si } x \geqslant 0, \text{ alors } \sqrt{x^2} = x. \\ \text{Si } x \leqslant 0, \text{ alors } -x \geqslant 0, \text{ d'où } \sqrt{x^2} = -x. \end{cases}$

EXEMPLE

$$\sqrt{(-0{,}5)^2} = \sqrt{0{,}25} = 0{,}5$$

VARIATIONS DE LA FONCTION RACINE CARRÉE

La fonction racine carrée définie pour tout réel x positif par $f(x) = \sqrt{x}$ est strictement croissante.

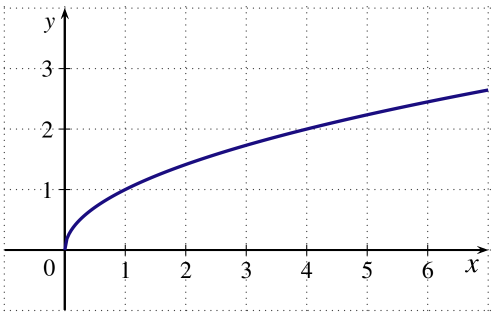
Démonstration :

Soit a et b deux réels positifs tels que $0 \leqslant a < b$:

$$a - b = (\sqrt{a})^2 - \left(\sqrt{b}\right)^2 = \left(\sqrt{a} + \sqrt{b}\right)\left(\sqrt{a} - \sqrt{b}\right)$$

Comme $0 \leqslant a < b$, alors $\left(\sqrt{a} + \sqrt{b}\right) > 0$. Par conséquent, $a - b$ et $\left(\sqrt{a} - \sqrt{b}\right)$ sont de même signe.
Ainsi, si $a - b < 0$ alors $\left(\sqrt{a} - \sqrt{b}\right) < 0$ soit $f(a) < f(b)$. La fonction racine carrée est strictement croissante sur $[0;+\infty[$.

COURBE REPRÉSENTATIVE



Résoudre une équation irrationnelle :

On utilise le fait que l'égalité $\sqrt{a} = b$ équivaut à $a = b^2$ et $b \geq 0$.

Exemple : Résoudre l'équation $\sqrt{x-1} = 2$.

Correction :
On examine les conditions d'existence : $x - 1 \geq 0$ c'est-à-dire $x \geq 1$.
On résout alors l'équation dans $[1 ; +\infty[$.

$$\sqrt{x-1} = 2 \Leftrightarrow x - 1 = 2^2 \Leftrightarrow x - 1 = 4 \Leftrightarrow x = 5$$

Cette solution convient car elle appartient à $[1 ; +\infty[$, donc $S = \{5\}$.

Résoudre une inéquation avec racines carrées :

On utilise le fait que l'égalité $\sqrt{a} < b$ équivaut à $a < b^2$ et $b \geq 0$.

Exemple : Résoudre l'inéquation $\sqrt{x} > 10^{-3}$.
Correction
On examine les conditions d'existence : $x \geq 0$. On résout dans $[0\,;\,+\infty[$.
$\sqrt{x} > 10^{-3} \Leftrightarrow \left(\sqrt{x}\right)^2 > \left(10^{-3}\right)^2$ car la fonction carré est strictement croissante sur $[0\,;\,+\infty[$
$\Leftrightarrow x > 10^{-6}$
$S = \left]10^{-6}\,;\,+\infty\right[$

5 FONCTION CUBE

DÉFINITION

La fonction cube est la fonction f définie pour tout réel x par $f(x) = x^3$.

VARIATIONS DE LA FONCTION CUBE

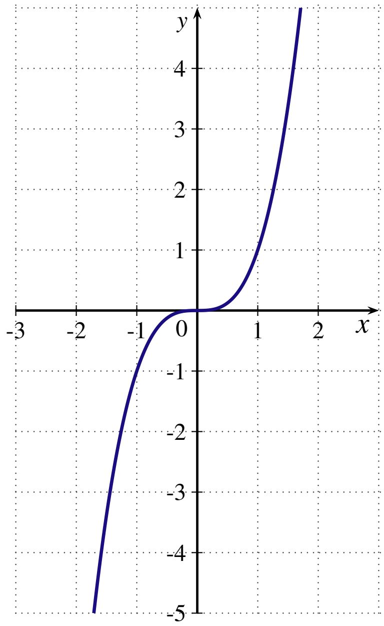
La fonction cube est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

Démonstration :

Soit a et b deux réels tels que $a < b$:

- Si $a < 0$ et $b > 0$, alors $a^3 < 0$ et $b^3 > 0$ donc $a^3 < b^3$.
- Si a et b sont de même signe :
  Pour tous réel a et b on a
  $$a^3 - b^3 = (a-b)\left(a^2 + ab + b^2\right)$$
  a et b étant de même signe, le produit $ab > 0$ d'où $a^2 + ab + b^2 > 0$. Par conséquent, $a^3 - b^3$ est du même signe que $(a-b)$.
  Comme $a < b$ on en déduit que $a^3 < b^3$.

COURBE REPRÉSENTATIVE



6 POSITION RELATIVE DE COURBES D'ÉQUATION $y = x$; $y = x^2$ ET $y = x^3$

— Pour tout nombre réel x de l'intervalle $[0 ; 1]$: $x^3 \leq x^2 \leq x \leq \sqrt{x}$.
— Pour tout nombre réel x de l'intervalle $[1 ; +\infty[$: $\sqrt{x} \leq x \leq x^2 \leq x^3$

Démonstration :

1[er] cas : On suppose que $0 \leq x \leq 1$.

— On multiplie chaque membre de $0 \leq x \leq 1$ par x : Comme $x > 0$, l'ordre est conservé :
$0 \leq x \leq 1 \iff 0 \leq x^2 \leq x \quad (1)$
— On multiplie chaque membre de $0 \leq x \leq 1$ par x^2 : Comme $x^2 > 0$, l'ordre est conservé :
$0 \leq x \leq 1 \iff 0 \leq x^3 \leq x^2 \quad (2)$
— La fonction racine carrée est croissante sur $\mathbb{R}^+$ donc $0 \leq x \leq 1 \iff \sqrt{x} \leq \sqrt{1}$ donc $\sqrt{x} \leq 1$.
On multiplie chaque membre par $\sqrt{x}$:
$x \leq \sqrt{x} \quad (3)$
— Avec les inégalités (1) (2) et(3), on obtient :

$$0 \leq x \leq 1 \Rightarrow x^3 \leq x^2 \leq x \leq \sqrt{x}$$

2nd cas : On suppose que $1 \leq x$.

- On multiplie chaque membre de $1 \leq x$ par x : Comme $x > 0$, l'ordre est conservé :
  $1 \leq x \iff x \leq x^2 \quad (1)$
- On multiplie chaque membre de $1 \leq x$ par x^2 : Comme $x^2 > 0$, l'ordre est conservé :
  $1 \leq x \iff x^2 \leq x^3 \quad (1)$
- La fonction racine carrée est croissante sur $\mathbb{R}^+$ donc $1 \leq x \iff \sqrt{1} \leq \sqrt{x}$ donc $1 \leq \sqrt{x}$.
  On multiplie chaque membre par $\sqrt{x}$:
  $\sqrt{x} \leq x \quad (3)$
- Avec les inégalités (1) (2) et(3), on obtient :

$$1 \leq x \Rightarrow \sqrt{x} \leq x \leq x^2 \leq x^3$$

Synthèse des représentation graphique des fonctions de références étudiées en seconde

: