Arithmétique

1 MULTIPLES ET DIVISEURS

Définition :
Soient a et b deux nombres entiers naturels.
On dit que b *divise* a lorsqu'il existe un entier naturel q tel que $a = b \times q$.
On dit encore que b est un *diviseur* de a ou que a est un *multiple* de b.)

Exemple :
On dit que 3 *divise* 15 car il existe un entier naturel **5** tel que $15 = \mathbf{5} \times 3$.
On dit encore que 3 est un *diviseur* de 15 ou que 15 est un *multiple* de 3.)

Propriété :
Pour $b \neq 0$, b est un **diviseur** de a si et seulement si a est un **multiple** de b.

Propriété :
La somme de deux multiples d'un même entier relatif a est aussi un multiple de a

DÉMONSTRATION POUR DEUX MULTIPLES DE 11

Soit a et b deux multiples de 11.
D'après la définition de cours, il existe deux entiers k_1 et k_2 tels que : $a = 11 \times k_1$ et $b = 11 \times k_2$.
On a donc : $a+b = 11k_1 + 11k_2 = 11(k_1+k_2)$
k_1 et k_2 étant des entiers, (k_1+k_2) est aussi un entier.
Appelons $q = k_1 + k_2$, on a montré que $a+b = 11 \times q$.
D'après la définition de cours, $a+b$ est donc un multiple de 11.

2 NOMBRES PREMIERS

Définition :
Un entier naturel $p \geqslant 2$ est un *nombre premier* lorsque ses seuls diviseurs sont 1 et p.

Remarques :
Le nombre 1 n'est pas considéré comme un nombre premier.
Les nombres premiers inférieurs à 20 sont :$\{2;3;5;7;11;13;17;19\}$

Propriété (*admise*) : Décomposition en facteurs de nombres premiers
Tout nombre entier peut s'écrire de façon unique comme un produit de facteurs de nombres premiers.

Application
Comme : $1320 = 2^3 \times 3 \times 5 \times 11$ et $9900 = 2^2 \times 3^2 \times 5^2 \times 11$
On a alors : $\dfrac{1320}{9900} = \dfrac{2^3 \times 3 \times 5 \times 11}{2^2 \times 3^2 \times 5^2 \times 11} = \dfrac{2}{3 \times 5} = \dfrac{2}{15}$

3 NOMBRES PAIRS ET IMPAIRS

Définition :
On appelle *nombre pair*, tout entier multiple de 2 et *nombre impair* tout entier qui n'est pas pair.

Conséquence :

— Si p est un nombre pair alors il existe un entier n tel que $p = 2 \times n$

— Si p est un nombre impair alors il existe un entier n tel que $p = 2 \times n + 1$

Propriété :
Le carré d'un nombre impair est un nombre impair

Démonstration :
Soit k un nombre impair.
On sait d'après la définition qu'il existe un entier n tel que : $k = 2 \times n + 1$
On a alors : $k^2 = (2n+1)^2 = 4n^2 + 4n + 1 = 2(2n^2 + 2n) + 1$
Soit $p = 2n^2 + 2n$. p est clairement un entier.
On a montré qu'il existe un entier p tel que : $k^2 = 2p + 1$
Ce qui est la caractéristique d'un nombre impair.