1 FONCTION AFFINE (VIDÉO 1)

2 FONCTION CARRÉ

DÉFINITION (VIDÉO 2)

On appelle fonction carré, la fonction qui à tout réel x fait correspondre le nombre par x^2

EXEMPLES

Soit f la fonction définie pour tout x de $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2$
Calculer :

- $f(2) = \ldots\ldots\cdots = \ldots$
- $f(-3) = \ldots\ldots\cdots = \ldots$
- $f(0) = \ldots\ldots\cdots = \ldots$

REMARQUES

- Quel est l'image de 3 par la fonction carrée ?
- 4 a-t-il un ou des antécédents ? Si oui, lesquels ?
- 3 a-t-il un ou des antécédents ? Si oui, lesquels ?
- -1 a-t-il un ou des antécédents ? Si oui, lesquels ? PROPRIÉTÉS

PREMIÈRE PROPRIÉTÉ :

— Un carré est toujours positif ou nul. Pour tout réel x, on a $x^2 \geqslant 0$.
— Un nombre et son opposé ont le même carré. Pour tout réel x, on a $x^2 = (-x)^2$.

VARIATIONS DE LA FONCTION CARRÉ (VIDÉO 2)

La fonction carré définie pour tout réel x par $f(x) = x^2$ est décroissante sur ……… et croissante sur ………

TABLEAU DES VARIATIONS DE LA FONCTION CARRÉ

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f(x)$		$\ldots$	

On observe que la fonction admet un ……… en ……… qui vaut ……… Conséquence :

CONSÉQUENCES

- Soit deux nombres a et b tels que $0 \leqslant a \leqslant b$, on a alors ………
- Soit deux nombres a et b tels que $a \leqslant b \leqslant 0$, on a alors ………
- On dit que le carré conserve l'ordre de deux nombres … … … mais qu'il le renverse pour deux nombres ………

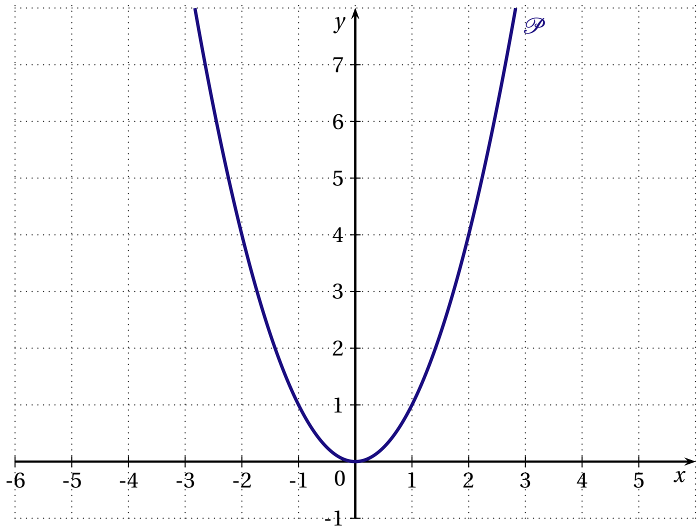
REPRÉSENTATION GRAPHIQUE (VIDÉO 3)

Compléter le tableau de valeurs de la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) := x^2$

x	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4
$f(x)$									

Ce tableau est-il un tableau de proportionnalité ?

La courbe représentative de la fonction carré f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2$ est la parabole $\mathscr{P}$ d'équation $y = x^2$.



REMARQUES :

- Cette courbe s'appelle une ....
- L'origine du repère est le .... de cette ....
- **Propriété graphique :**
  - Pour tout nombre x, on a $x^2 = (-x)^2$ donc ....
  - Deux nombres opposés ont donc la même ....
  - La parabole représentative de la fonction carrée admet donc .... comme axe de symétrie.
  - On dit qu'une fonction qui vérifie cette propriété est une fonction **paire**

3 FONCTION INVERSE

DÉFINITION (VIDÉO 4)

La fonction inverse est la fonction f définie pour tout réel $x \in \dots\dots$ par $f(x) = \dfrac{1}{x}$.

NOTATION :

On peut noter l'ensemble de définition de la fonction inverse de plusieurs manières équivalentes :
.... =........

THÉORÈME :(VIDÉO 5)

La fonction inverse est strictement décroissante sur $\mathbb{R}_-^*$ et aussi sur $\mathbb{R}_+^*$

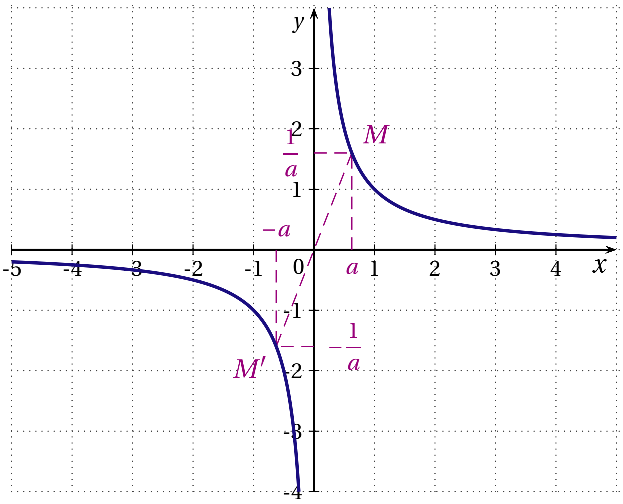
DÉMONSTRATION Soit deux nombres a et b tels que $a < b < 0$

TABLEAU DES VARIATIONS DE LA FONCTION INVERSE

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f(x)$	$\searrow$	$\Vert$	$\searrow$

REPRÉSENTATION GRAPHIQUE :(VIDÉO 6)

Dans un repère, la représentation graphique de la fonction f définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par $f(x) = \dfrac{1}{x}$ est une l'hyperbole.



THÉORÈME :
Dans un repère d'originie O, la courbe de la fonction inverse admet ....

DÉMONSTRATION :

REMARQUES :

— Pour tout réel $a \neq 0$, $f(-a) = -\dfrac{1}{a} = -f(a)$.
Les points $M\left(a; f(a)\right)$ et $M'\left(-a; f(-a)\right)$ sont symétriques par rapport à l'origine du repère.
L'hyperbole admet l'origine du repère comme centre de symétrie.
On dit que la fonction inverse est une **fonction impaire**.

— On peut rendre $f(x) = \dfrac{1}{x}$ aussi grand que l'on veut, pourvu que x soit suffisamment proche de 0 et positif.
On peut rendre $f(x) = \dfrac{1}{x}$ aussi proche de 0 que l'on veut, pourvu que x soit suffisamment grand.
Graphiquement, l'hyperbole se rapproche de l'axe des abscisses lorsque x tend vers $+\infty$ (ou vers $-\infty$), et de l'axe des ordonnées lorsque x se rapproche de 0.
On dit que l'hyperbole a pour **asymptotes** les axes du repère.

4 FONCTION RACINE CARRÉE

DÉFINITION 1

Soit a un réel positif. Le nombre $\sqrt{a}$ est le seul réel positif dont le carré est a.

DÉFINITION 2 :(VIDÉO 7)

La fonction racine carrée est la fonction f définie pour tout réel x appartenant à l'intervalle .... par $f(x) = \ldots\ldots$

NOTATIONS : On peut noter le domaine de définition de la fonction racine carrée de plusieurs manières équivalentes : .... = ...

REMARQUE

Il ne faut pas confondre $\left(\sqrt{x}\right)^2$ et $\sqrt{x^2}$:

— $\left(\sqrt{x}\right)^2 = x$ seulement pour $x \geqslant 0$.

— $\begin{cases} \text{Si } x \geqslant 0, \text{ alors } \sqrt{x^2} = x. \\ \text{Si } x \leqslant 0, \text{ alors } -x \geqslant 0, \text{ d'où } \sqrt{x^2} = -x. \end{cases}$

EXEMPLE

$$\sqrt{(-0{,}5)^2} = \sqrt{0{,}25} = 0{,}5$$

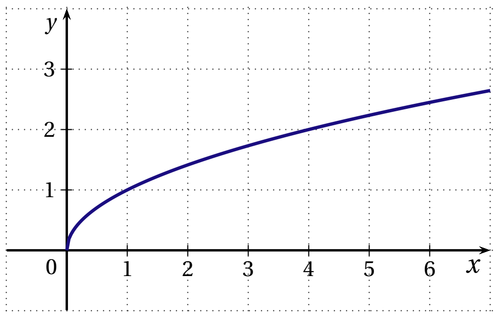
VARIATIONS DE LA FONCTION RACINE CARRÉE

La fonction racine carrée est strictement croissante sur l'intervalle ....

DÉMONSTRATION :

REPRÉSENTATION GRAPHIQUE : (VIDÉO 8)

x	0	1	2	3	4	9	13
$\sqrt{x}$							



REMARQUE :(VIDÉO 9)
Dans un repère orthogonal, la courbe de la fonction racine carrée est .... par rapport à la .... du plan de la branche de parabole d'équation .... pour $x \geqslant 0$

Pour tout $a \geqslant 0$, si $\sqrt{x} = a \iff x = \ldots\ldots$
Pour tout $a \geqslant 0$, si $\sqrt{x} > a \iff x > \ldots\ldots$
Pour tout $a \geqslant 0$, si $\sqrt{x} < a \iff x < \ldots\ldots$

APPLICATION :
Résoudre $\sqrt{x} = 7$; $\sqrt{x} < 5$; $\sqrt{x} > -1$

5 FONCTION CUBE

DÉFINITION : (VIDÉO 10)

La fonction cube est la fonction f définie pour tout réel x par $f(x) = x^3$.

PROPRIÉTÉ :

La fonction cube est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

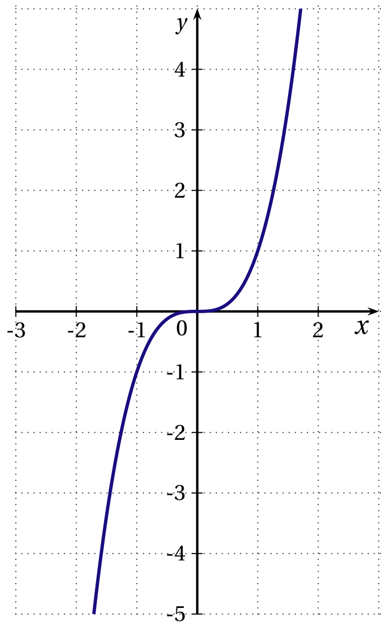
Démonstration admise

REMARQUE :
Dans un repère orthogonal, la courbe de la fonction cube est symétrique par rapport au centre du repère.
Pour tout x, on a $x^3 = (-x)^3$
On dit que la fonction cube est une **fonction impaire**.

COURBE REPRÉSENTATIVE

TABLEAU DE VALEURS : :

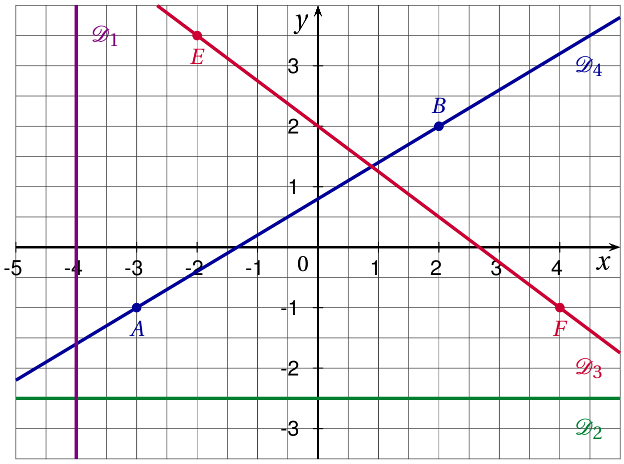
x	-2	-1,5	-1	-0,5	0	0,5	1	1,5	2
x^3									



APPLICATION :

Résoudre : $x^3 = 3$; puis $x^3 < 2$

EXERCICE 1



Dans chaque cas où la droite représentée ci-dessus, est la courbe représentative d'une fonction, déterminer la fonction affine associée.

EXERCICE 2

Dans chacun des cas suivants, déterminer la fonction affine f puis donner son sens de variation

1. $f(-2) = 3$ et $f(3) = -1$
2. La droite représentant la fonction f passe par les points de coordonnées $(-2;-1)$ et $(1;3)$.

EXERCICE 3

1. f est une fonction affine définie pour tout réel x telle que $f(-1{,}5) = -2$ et $f(3) = 1$.
   Donner une expression de $f(x)$.
2. g est une fonction affine définie pour tout réel x telle que $g(2) = -1$ et $g(4) - g(-2) = -9$.
   Donner une expression de $g(x)$.
3. Résoudre dans $\mathbb{R}$, l'inéquation $f(x) \leqslant g(x)$.

EXERCICE 4

1. Donner un encadrement de $\dfrac{1}{x}$ dans chacun des cas suivants :

   a) $-0{,}5 < x < -0{,}4$; b) $\dfrac{2}{3} < x < 1$; c) $x > \dfrac{1}{5}$; d) $x \leqslant -\sqrt{2}$
2. Dans chaque cas, trouver les réels x qui satisfont la condition donnée :

   a) $\dfrac{1}{x} \leqslant \dfrac{3}{4}$; b) $\dfrac{1}{x} > 2$; c) $-2 < \dfrac{1}{x} \leqslant -\dfrac{1}{5}$; d) $-\dfrac{1}{3} \leqslant \dfrac{1}{x} \leqslant 3$

EXERCICE 5

Existe-t-il deux entiers naturels consécutifs dont la différence des inverses est égale à l'inverse de 600 ?

EXERCICE 6

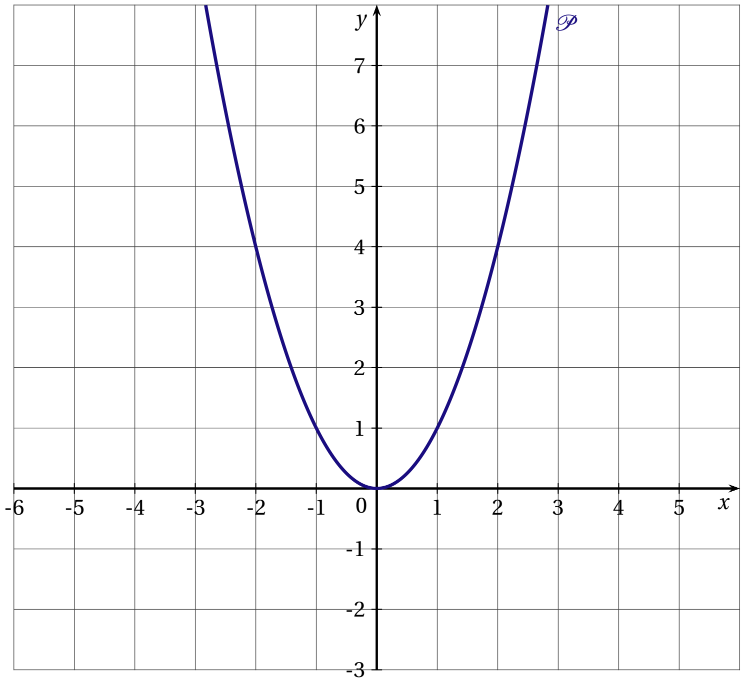
1. Dire si les implications suivantes sont vraies ou fausses.

   a) $x > 4 \Rightarrow \dfrac{1}{x} < \dfrac{1}{4}$; b) $x \leqslant -\dfrac{2}{3} \Rightarrow \dfrac{1}{x} \geqslant -1{,}5$; c) $x > -2 \Rightarrow \dfrac{1}{x} < -\dfrac{1}{2}$; d) $x < 0{,}6 \Rightarrow \dfrac{1}{x} > \dfrac{5}{3}$
2. Pour chacune des implications précédentes, énoncer la réciproque et dire si celle ci est vraie ou fausse.

EXERCICE 7

La parabole $\mathscr{P}$ ci-dessous est la courbe représentative de la fonction f définie pour tout réel x par $f(x) = x^2$.

1. Soit g la fonction affine définie pour tout réel x par $g(x) = -3x - \frac{9}{4}$.
   a) Tracer la droite $\mathscr{D}$ représentative de la fonction g.
   b) Étudier les positions relatives de la droite $\mathscr{D}$ et de la parabole $\mathscr{P}$.
2. Déterminer une équation de la droite Δ n'ayant que le point A d'abscisse 2 en commun avec la parabole. (*On dit que la droite Δ est tangente à la parabole $\mathscr{P}$ au point A d'abscisse 2.*)

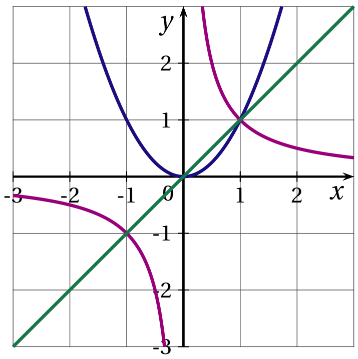


EXERCICE 8

1. Soit x un réel tel que $1 < x \leqslant 2$
   a) Montrer que $(x-1)^3 \leqslant (x-1)^2$
   b) Que peut-on en déduire pour $\frac{1}{(x-1)^3}$ et $\frac{1}{(x-1)^2}$?
2. La proposition « Pour tout réel $x > 1$, $\frac{1}{(x-1)^3} \geqslant \frac{1}{(x-1)^2}$ » est-elle vraie ou fausse ?

EXERCICE 9

1. Les courbes représentatives des fonctions $f : x \mapsto x^2$, $g : x \mapsto x$ et $h : x \mapsto \frac{1}{x}$ sont représentées sur le graphique ci-dessous



Par lecture graphique, émettre une conjecture à propos de l'ordre croissant des trois nombres a, a^2 et $\frac{1}{a}$ selon les différentes valeurs du réel a.

2. Si $0 < a \leqslant 1$ montrer que $a^2 \leqslant a \leqslant \frac{1}{a}$

EXERCICE 10

Montrer que pour tous réels a et b positifs on a : $\sqrt{a} + \sqrt{b} \geqslant \sqrt{a+b}$.

EXERCICE 11

Soit f la fonction définie par $f(x) = \sqrt{8-2x}$.

1. Déterminer l'ensemble de définition de la fonction f.
2. Résoudre l'équation $f(x) = 3$.

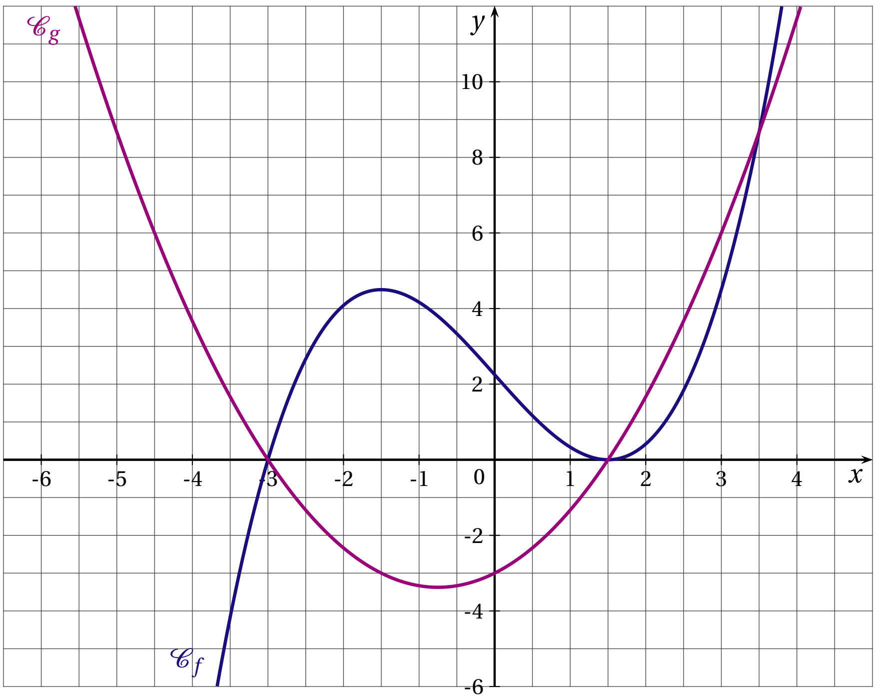
EXERCICE 12

Dans chacun des cas suivants, étudier le signe de la fonction f sur $\mathbb{R}$.

1. f est définie par $f(x) = 100 - 0{,}1x^3$.
2. f est définie par $f(x) = \frac{x^3}{8} - 1$.

EXERCICE 13

Soient f et g les fonctions définies pour tout réel$x$ par $f(x) = \frac{x^3}{3} - \frac{9}{4}x + \frac{9}{4}$ et $g(x) = \frac{2}{3}x^2 + x - 3$.
Les courbes représentatives des fonctions f et g sont tracées ci-dessous.



1. a) Calculer $f\left(-\frac{3}{2}\right)$.
   b) Par lecture graphique, donner le tableau de variation de la fonction f.
   c) Montrer que pour tout réel x, $f(x) = \frac{(x+3)(2x-3)^2}{12}$.
   d) Établir le tableau de signes de $f(x)$.
2. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $g(x) = 0$.
3. Étudier les positions relatives des courbes $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$.