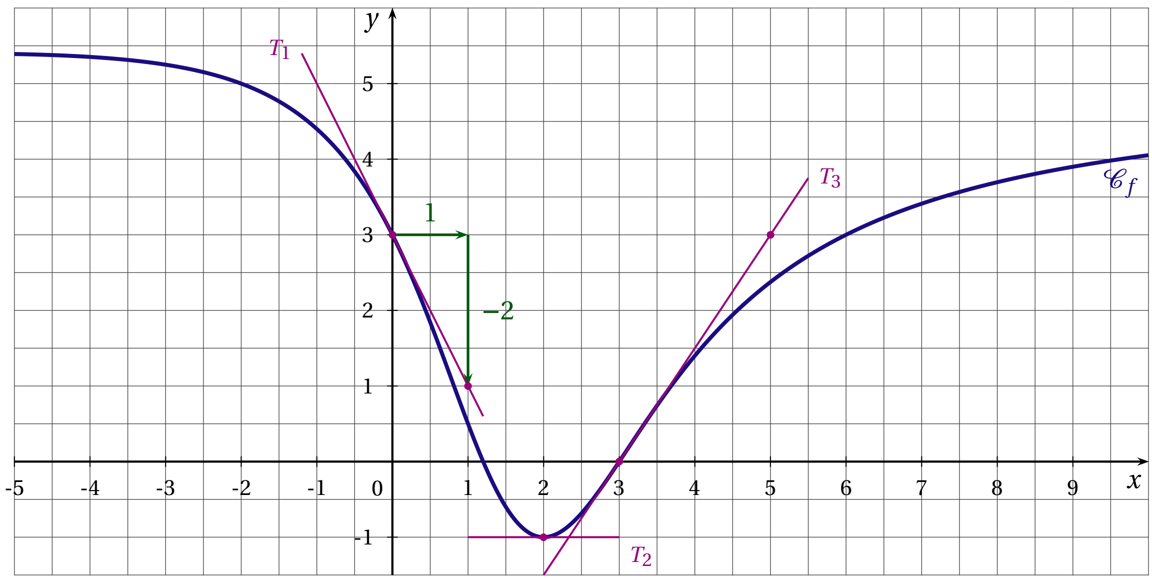
APPROCHE GRAPHIQUE

EXERCICE 1

La courbe $\mathscr{C}_f$ tracée ci-dessous est la courbe représentative d'une fonction f définie sur $\mathbb{R}$.



1. Par lecture graphique, déterminer $f'(0)$, $f'(2)$ et $f'(3)$.
2. Déterminer une équation de la tangente à la courbe $\mathscr{C}_f$ au point d'abscisse 0 puis une au point d'abscisse 3

EXERCICE 2

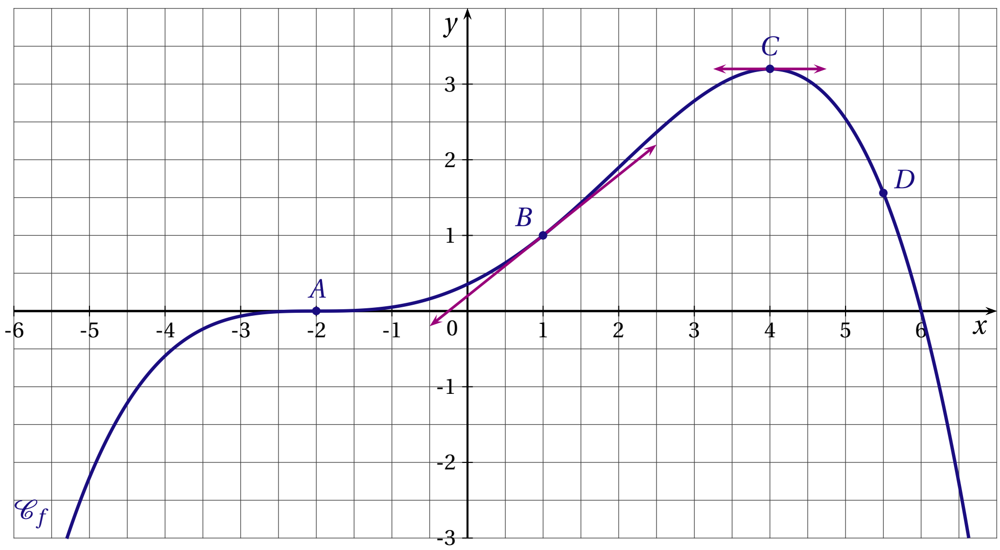
Soit f une fonction définie et dérivable sur $\mathbb{R}$. On note f' la dérivée de la fonction f.
On donne ci-dessous la courbe $\mathscr{C}_f$ représentant la fonction f.

La courbe $\mathscr{C}_f$ passe par les points $A(-2;0)$, $B(1;1)$, $C(4;3{,}2)$ et $D\left(\dfrac{11}{2};\dfrac{25}{16}\right)$.

L'axe des abscisses est tangent en A à la courbe $\mathscr{C}_f$.

La courbe $\mathscr{C}_f$ admet une deuxième tangente parallèle à l'axe des abscisses au point C.

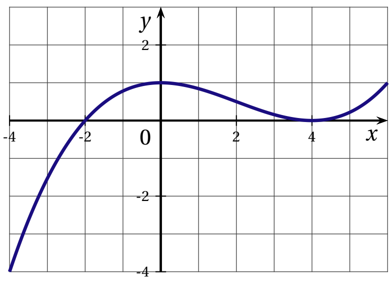
La tangente à la courbe au point B passe par le point $M(-4;-3)$.



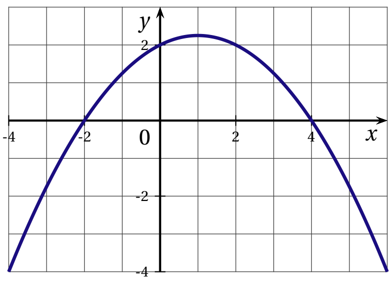
À partir du graphique et des données de l'énoncé, répondre aux questions suivantes.

1. Déterminer $f'(-2)$, $f'(4)$ et $f'(1)$.
2. Dresser sans justification le tableau de variations de la fonction f sur $\mathbb{R}$.
3. Dresser sans justification le tableau de signes de la fonction f' sur $\mathbb{R}$.

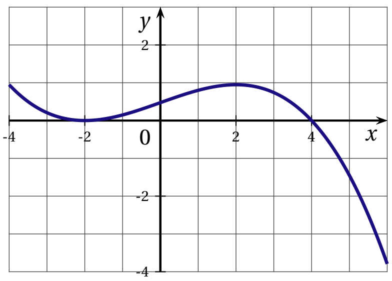
4. Une des trois courbes ci-dessous est la représentation graphique de la fonction f' . Déterminer laquelle.



Courbe $\mathscr{C}_1$



Courbe $\mathscr{C}_2$



Courbe $\mathscr{C}_3$

APPLICATION DE FORMULES

EXERCICE 3

Dans chacun des cas suivants, calculer la dérivée $f'(x)$.

1. f est définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 3x^4 - 5x^3 + x - 5$
2. f est définie sur $]0;+\infty[$ par $f(x) = 3x^2 - \dfrac{3}{x} + 1$
3. f est définie sur $]0;+\infty[$ par $f(x) = \dfrac{x^3}{2} + 3x^2 - \dfrac{5}{x}$
4. f est définie sur $]0;+\infty[$ par $f(x) = x^3 + 2\sqrt{x} + 5$.

EXERCICE 4

Déterminer la dérivée de la fonction f, définie sur $]0;+\infty[$ par $f(x) = \left(2 + \dfrac{x^2}{3}\right)\left(1 - \dfrac{2}{x}\right)$.

EXERCICE 5

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \dfrac{4x-3}{x^2+1}$. Calculer $f'(x)$.

EQUATION DE TANGENTE

EXERCICE 6

1. Donner une équation de la tangente à la parabole d'équation $y = x^2 - 3x + 5$ au point d'abscisse -1.
2. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 3x^2 - 5x + 1$
   Déterminer une équation de la tangente à la courbe représentative de la fonction f parallèle à la droite d'équation $y = x$.

EXERCICE 7

Soit f la fonction définie sur pour tout réel x par $f(x) = \dfrac{2}{3}x^3 - \dfrac{x^2}{2} - \dfrac{13x}{2} + \dfrac{29}{3}$

1. Donner une équation de la tangente $\mathscr{D}$ à la courbe représentative de la fonction f au point d'abscisse 2.
2. La courbe représentative de la fonction f admet-elle une deuxième tangente parallèle à la droite $\mathscr{D}$?
   Si oui donner son équation.

VARIATIONS DE FONCTIONS

EXERCICE 8

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^3 - 9x^2 + 24x - 16$.

1. Calculer la dérivée de f
2. Étudier le signe de f'
3. En déduire les variations de f

EXERCICE 9

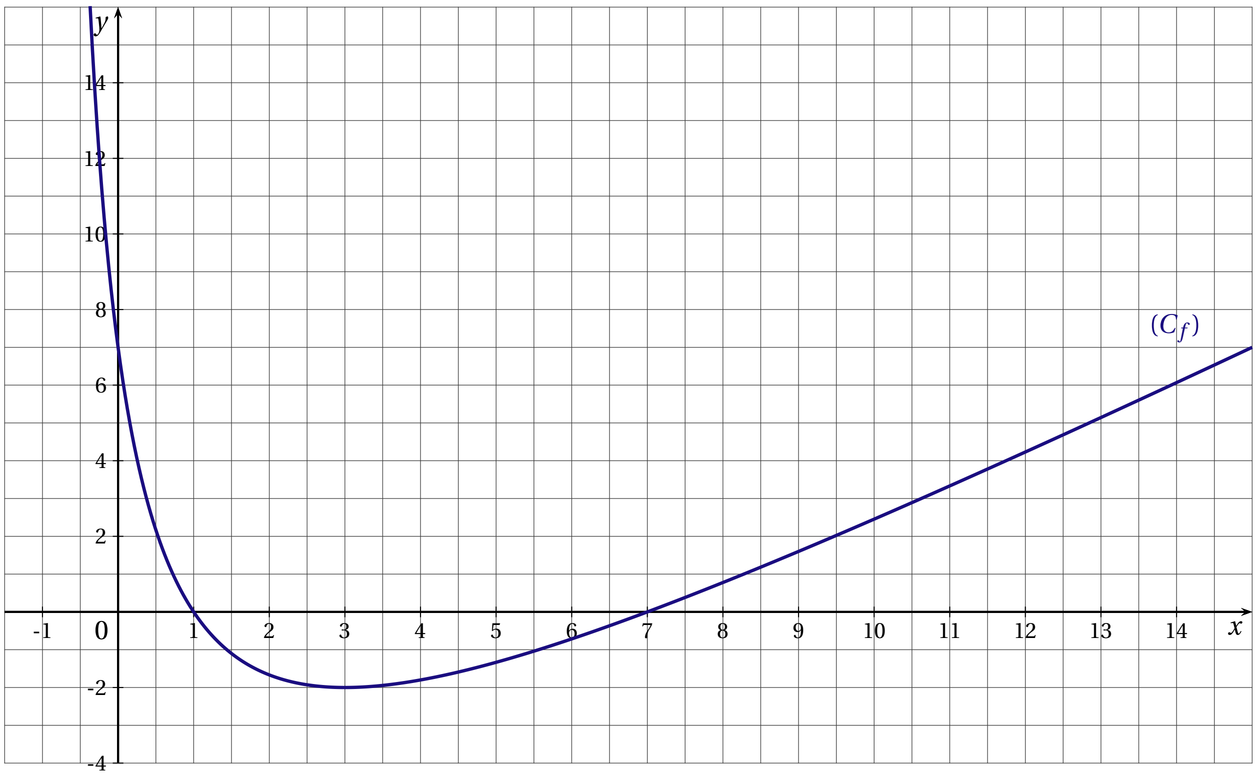
Soit f la fonction définie sur l'intervalle $]-1;+\infty[$ par $f(x) = 1 - \dfrac{x}{2} - \dfrac{2}{x+1}$. On note C_f sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère orthonormal.

1. On note f' la dérivée de la fonction f. Calculer $f'(x)$.
2. Étudier le signe de $f'(x)$.
3. Donner le tableau des variations de f.

EXERCICE 10

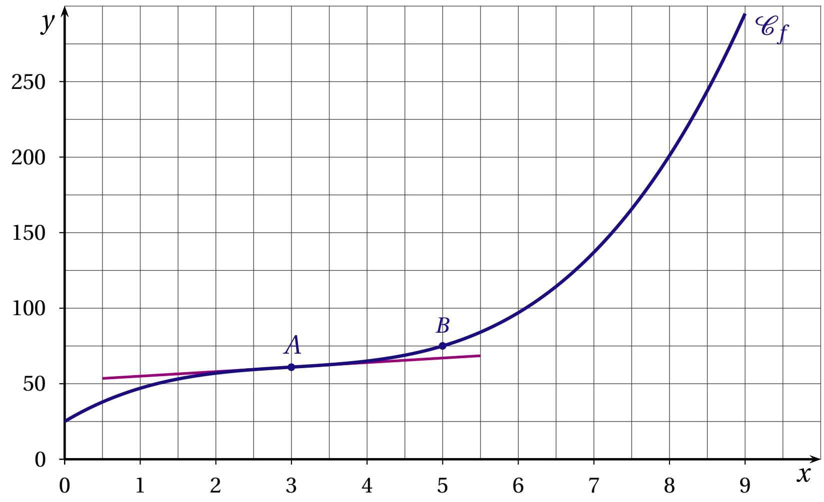
Soit f la fonction définie sur $]-1;+\infty[$ par $f(x) = \dfrac{x^2 - 8x + 7}{x+1}$. On note f' la dérivée de la fonction f.
Sa courbe représentative dans un repère orthogonal du plan, notée C_f, est donnée ci-dessous à titre indicatif.

1. Calculer $f'(x)$.
2. Étudier le signe de $f'(x)$.
3. Donner le tableau des variations de f.
4. Déterminer une équation de la tangente T à la courbe C_f au point d'abscisse 1.
   Tracer sur le graphique donné, la tangente T.



EXERCICE 11

La capacité de production mensuelle d'une entreprise est limitée à 9 milliers d'articles.
Soit x le nombre de milliers d'articles fabriqués. Le coût total de production $f(x)$, exprimé en milliers d'euros, est représenté par la courbe $\mathscr{C}_f$ dans le plan muni d'un repère orthogonal.
La tangente à la courbe $\mathscr{C}_f$ au point $A(3;61)$ est tracée sur le graphique.
La tangente au point $B(5;75)$ à la courbe $\mathscr{C}_f$ passe par l'origine du repère.

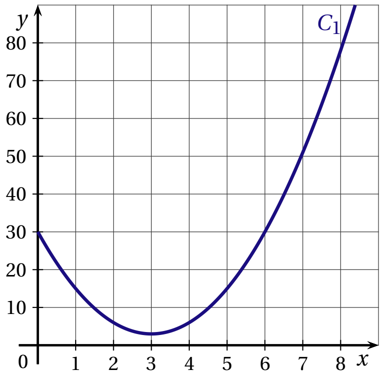


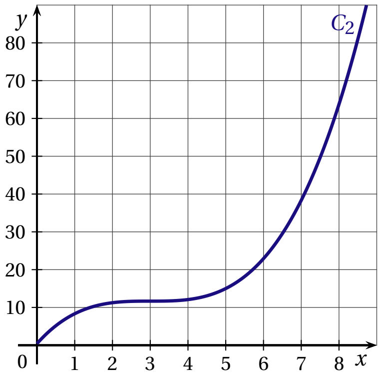
On admet que la fonction f est définie et dérivable sur l'intervalle $[0;9]$ et, on note f' la fonction dérivée de la fonction f.

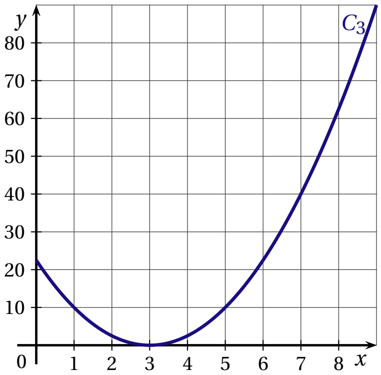
PARTIE A

Le coût marginal est assimilé sur l'intervalle $[0;9]$ à la dérivée du coût total de production.

1. À partir du graphique et des renseignements fournis déterminer la valeur du coût marginal pour $x = 5$.
2. Quelle est, parmi les trois courbes proposées ci-dessous, celle qui représente le coût marginal ?







PARTIE B

La fonction f est définie pour tout réel x de l'intervalle $[0;9]$ par $f(x) = x^3 - 9x^2 + 30x + 25$.

1. Calculer $f'(x)$.
2. Étudier les variations de la fonction f.

PARTIE C

Le prix de vente d'un article est de 30 €. Le bénéfice mensuel, exprimé en milliers d'euros, réalisé par l'entreprise pour x milliers d'articles vendus est donné par $B(x) = 30x - f(x)$.

1. Pour quelle quantité d'articles vendus, le bénéfice est-il maximal ?
2. Déterminer les quantités commercialisées, arrondies à la centaine d'articles près, dégageant un bénéfice positif.

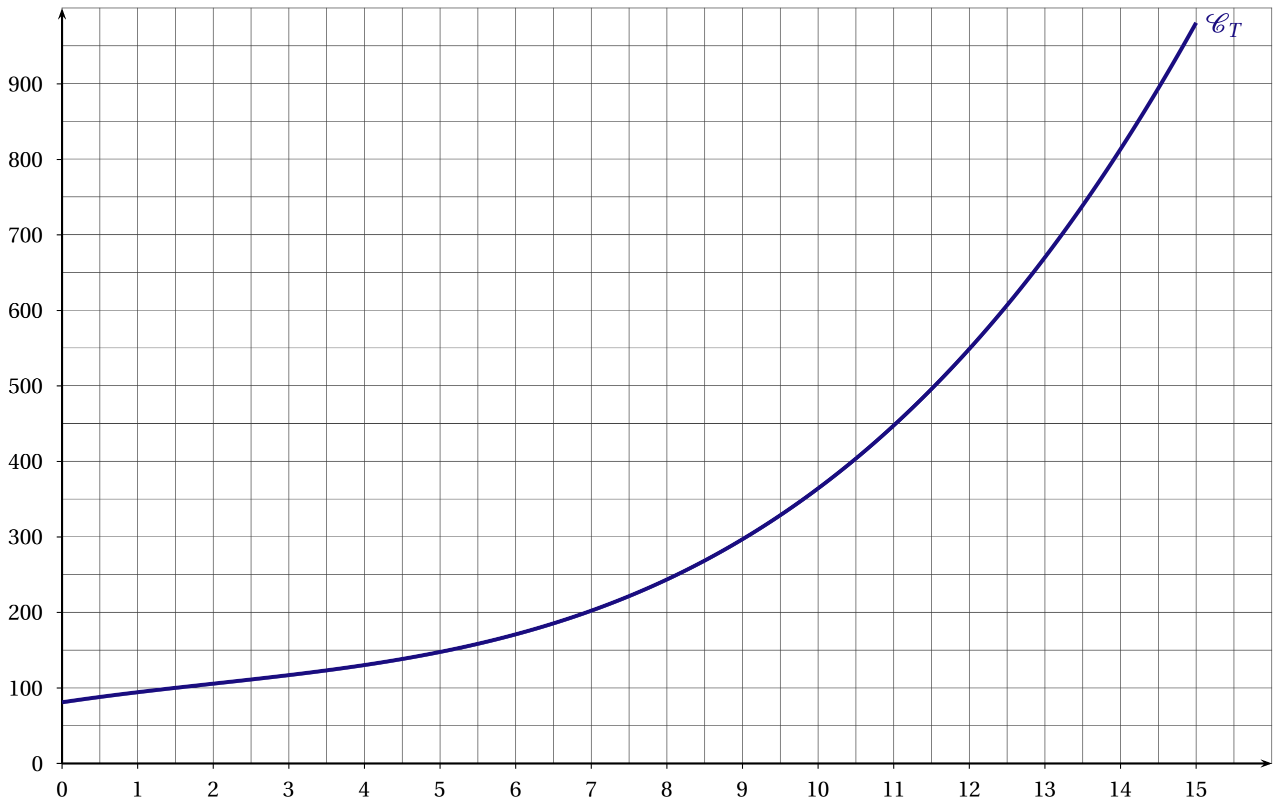
EXERCICE 12

Soit C la fonction définie pour tout réel x élément de l'intervalle $]0;15]$ par $C(x) = \dfrac{x^3}{3} - 2x^2 + 15x + 81$. La fonction C modélise le coût total de production, exprimé en milliers d'euros, de x milliers d'articles fabriqués.
La courbe $\mathscr{C}_T$ représentative de la fonction C est tracée ci-dessous dans un repère orthogonal.
On suppose que chaque article produit est vendu au prix de 60 €.

1. On note $R(x)$ la recette générée par la production et la vente de x milliers d'articles.
   a) Dans le repère ci-dessous, tracer la courbe représentative de la fonction recette.
   b) Déterminer graphiquement les valeurs arrondies au millier près des bornes de l'intervalle dans lequel doit se situer la production pour que l'entreprise réalise un bénéfice positif.

2. Le bénéfice est la fonction B définie sur l'intervalle $]0;15]$ par $B(x) = R(x) - C(x)$.
   a) Calculer $B'(x)$.
   b) Étudier les variations de la fonction B.
   c) En déduire la production x_0 pour laquelle le bénéfice est maximal.
   Quel est le montant en euro de ce bénéfice maximal ?

3. La fonction coût moyen, notée C_M, est la fonction définie sur l'intervalle $]0;15]$ par $C_M(x) = \dfrac{C(x)}{x}$.
   a) Sur le graphique ci-dessous, placer le point A sur la courbe $\mathscr{C}_T$ tel que la droite (OA) soit tangente à $\mathscr{C}_T$. On appelle a l'abscisse du point A.
   b) Montrer que le coefficient directeur de la droite (OA) est égal à $C_M(a)$.
   c) Par lecture graphique, conjecturer les variations de la fonction C_M sur l'intervalle $]0;15]$.



EXERCICE 13

Une entreprise fabrique et commercialise un certain produit. Sa capacité de production mensuelle est inférieure à 10 milliers d'articles.
Soit x le nombre de milliers d'articles fabriqués chaque mois ; le coût de production exprimé en milliers d'euros est modélisé par la fonction C définie pour tout x élément de l'intervalle $[0;10]$ par

$$C(x) = x^3 + 12x^2 + 21x + 320$$

La courbe représentative de la fonction C, notée $\mathscr{C}_T$, est donnée en annexe ci-dessous.

PARTIE A

1. Le coût marginal de fabrication pour une production de x milliers d'articles est donné par $C'(x)$ où C' est la dérivée de la fonction C.
   Calculer $C'(4)$ et $C'(6)$.
2. Justifier que la fonction C est strictement croissante sur $[0;10]$.

PARTIE B

Chaque article est vendu 273 euros, la recette mensuelle exprimée en milliers d'euros est donnée par

$$R(x) = 273x$$

1. a) Tracer sur le graphique ci-dessous, la courbe $\mathscr{D}$ représentative de la fonction R.

   b) Par lecture graphique, déterminer la production x_0 pour laquelle le bénéfice est maximal.

2. Le bénéfice mensuel exprimé en milliers d'euros est modélisé par la fonction B définie sur l'intervalle $[0;10]$ par $B(x) = R(x) - C(x)$.

   a) Calculer le montant en euros, du bénéfice si l'entreprise fabrique et vend 6 000 articles un mois donné.

   b) On note B' la dérivée de la fonction B.
   Montrer que pour tout réel x appartenant à l'intervalle $[0;10]$ on a $B'(x) = -3x^2 - 24x + 252$.

   c) Dresser le tableau de variation de la fonction B sur l'intervalle $[0;10]$.

   d) En déduire le nombre d'articles qu'il faut fabriquer et vendre chaque mois pour obtenir un bénéfice maximal. Quel est le montant en euro, de ce bénéfice maximal ?

PARTIE C

On note $f(x)$ le coût moyen de production exprimé en euros, par article fabriqué.
f est définie sur l'intervalle $]0;10]$ par $f(x) = \dfrac{x^3 + 12x^2 + 21x + 320}{x}$.

1. Conjecturer graphiquement les variations du coût moyen de production sur l'intervalle $]0;10]$.
2. On note f' la dérivée de la fonction f.
   Calculer $f'(x)$, et vérifier que $f'(x) = \dfrac{(x-4)(2x^2 + 20x + 80)}{x^2}$ pour tout réel x de l'intervalle $]0;10]$.
3. Étudier les variations de la fonction f sur $]0;10]$.
4. En dessous de quel prix de vente unitaire, l'entreprise est-elle sûre de ne faire aucun bénéfice ?

ANNEXE