Fonction exponentielle

I FONCTIONS EXPONENTIELLES DE BASE q (VIDÉO 1)

1 FONCTIONS EXPONENTIELLES $x \longmapsto q^x$, AVEC $q > 0$

Soit q un nombre strictement positif.
La suite (u_n) définie pour tout entier n par $u_n = q^n$ est une suite géométrique de raison q.
La fonction .... de base q est le prolongement de cette suite géométrique.

DÉFINITION

Soit q un réel strictement positif
La fonction f définie pour tout réel x par $f(x) = q^x$ s'appelle la fonction ....
On admet que cette fonction est dérivable sur $\mathbb{R}$.

EXEMPLE
La fonction f définie pour tout réel x par $f(x) = 0{,}8^x$ est la fonction exponentielle de base 0,8.
Une valeur approchée de l'image de $-5{,}3$ est obtenue à la calculatrice en tapant la séquence :
....

RELATION FONCTIONNELLE

La fonction exponentielle f de base $q > 0$ transforme ....
Pour tous réels x et y :

$$f(x+y) = f(x) \times f(y)$$

Autrement dit, pour tous réels x et y : ....

EXEMPLE :

$2{,}3^{3+4} =$ ....
Ce qui est découle des propriétés des puissances abordées en collège.

CONSÉQUENCES

— $\boxed{\text{Pour tous réels } x \text{ et } y, \text{ .... et ....}}$

En effet, ...

De plus, ...

— $\boxed{\text{Pour tout réel } x, \text{ ....}}$
En effet, ...

— $\boxed{\text{Pour tout réel } x \text{ et tout entier relatif } m, \text{ ....}}$
Propriété usuelle des exposants entiers relatifs.

— $\boxed{\text{Pour tout entier naturel } n > 0,\ q^{\frac{1}{n}} \text{ est « la racine } n\text{-ième » de } q}$
Pour tout entier naturel $n > 0$, comme $\dfrac{1}{n} \times n = 1$, alors $q^{\frac{1}{n}}$ est le nombre tel que $\left(q^{\frac{1}{n}}\right)^n = q$

EXEMPLE(**vidéo 2**)
Énoncé : Une entreprise s'est fixé comme objectif de réduire de 30 % ses émissions de gaz à effet de serre d'ici quinze ans. De combien doit-elle réduire en moyenne ses émissions de gaz chaque année pour

atteindre son objectif?

Correction : Soit $t\,\%$ le pourcentage d'évolution annuel moyen des émissions de gaz à effet de serre. On a :

$$\begin{aligned}\left(1+\frac{t}{100}\right)^{15}=0{,}7 &\iff 1+\frac{t}{100}=0{,}7^{\frac{1}{15}}\\ &\iff \frac{t}{100}=0{,}7^{\frac{1}{15}}-1\\ \text{Soit} &\quad \frac{t}{100}\approx -0{,}0235\end{aligned}$$

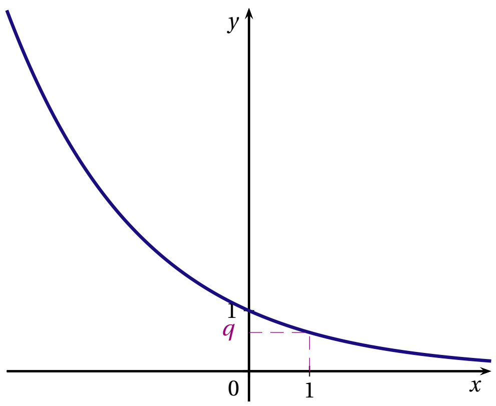
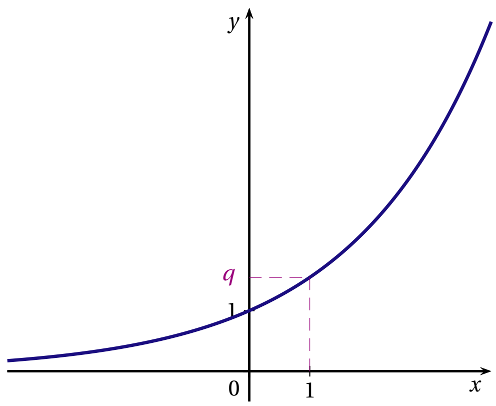
Pour atteindre son objectif, cette entreprise doit réduire chaque année, ses émissions de gaz à effet de serre d'environ 2,35 % .

2 SENS DE VARIATION : VIDÉO 3

En continuité avec les suites numériques, on admet que le sens de variation de la fonction exponentielle de base q avec $q>0$ est le même que celui de la suite géométrique associée :

- Si $0<q<1$, la fonction $x\longmapsto q^x$ est ....
- Si $q=1$, la fonction $x\longmapsto q^x$ est ....
- Si $q>1$, la fonction $x\longmapsto q^x$ est ....

3 PROPRIÉTÉS

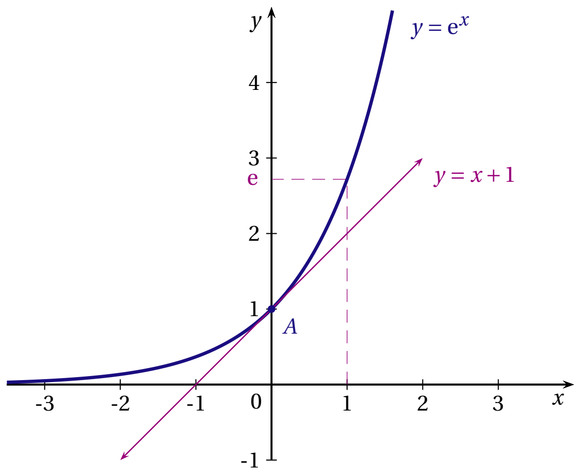
<table>
<tr><td>$0<q<1$</td><td>$q>1$</td></tr>
<tr><td>La fonction exponentielle de base q est strictement ....</td><td>La fonction exponentielle de base q est strictement ....</td></tr>
<tr><td>$\lim\limits_{x\to-\infty} q^x=\dots$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} q^x=.$</td><td>$\lim\limits_{x\to-\infty} q^x=.$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} q^x=\dots$</td></tr>
<tr><td>
</td><td>
</td></tr>
<tr><td colspan="2">La fonction fonction exponentielle de base q est .... sur $\mathbb{R}$</td></tr>
</table>

CONSÉQUENCE

Si $q>0$ et $q\neq 1$, alors pour tous nombres réels a et b : $q^a=q^b$ si, et seulement si, ...

II LA FONCTION EXPONENTIELLE : VIDÉO 4

On admet que parmi toutes les fonctions exponentielles de base q il existe une seule fonction dont le nombre dérivé en 0 soit égal à ..
Autrement dit, il existe une seule valeur du réel q telle que la tangente au point $A(0;1)$ de la courbe représentative de la fonction $x \longmapsto q^x$ a pour coefficient directeur 1.
Cette valeur particulière du réel q est notée e.
Le nombre e est un irrationnel une valeur approchée est : ....



1 DÉFINITION

La fonction $x \longmapsto e^x$ s'appelle la fonction exponentielle de base e ou plus simplement exponentielle. On la note exp

$$\exp : x \longmapsto e^x$$

CONSÉQUENCES

- La fonction exponentielle est définie pour tout réel x par ....
- $\exp(0) = e^0 = .,$ $\exp(1) = \ldots\ldots,$ $\exp(-1) = e^{-1} = . \,,$ $\exp(0{,}5) = e^{0{,}5} = \ldots$
- La fonction exponentielle est strictement .... sur $\mathbb{R}$: pour tout nombre réel x, ...
- La fonction exponentielle est dérivable sur $\mathbb{R}$ et son nombre dérivé en 0 est 1 : ....
- Pour tous réels x et y, et pour tout entier relatif m

$$e^{x+y} = \ldots\ldots\ldots, \qquad e^{-x} = \ldots, \qquad e^{x-y} = \ldots, \qquad (e^x)^m = \ldots.$$

2 DÉRIVÉE DE LA FONCTION EXPONENTIELLE : VIDÉO 5

La dérivée de la fonction exponentielle est la fonction exponentielle. Pour tout nombre réel x, $\exp'(x) = ..$

✻ DÉMONSTRATION

Pour tout réel x et pour tout réel
$h \neq 0$, ...

Or $\exp'(0) = 1$ signifie que .... soit ....

Donc pour tout réel x, ...

3 VARIATION

La fonction exponentielle est strictement .... sur $\mathbb{R}$

✻ DÉMONSTRATION

La fonction exponentielle est dérivable sur $\mathbb{R}$ et est égale à sa dérivée.
Or pour tout réel x, ... On en déduit que la fonction exponentielle est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

CONSÉQUENCES

— Pour tout réel $x \leqslant 0$, ...
— Pour tout réel $x \geqslant 0$, ...
— Pour tous réels x et y, $e^x = e^y \iff$ ..... et $e^x < e^y \iff$ ......

EXEMPLES

1. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation $e^{1-3x} < e^{2x-3}$

   $e^{1-3x} < e^{2x+3} \iff$ ....
   D'où l'ensemble solution $S =$..........
2. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation $e^{x^2-1} \geqslant 1$

   $e^{x^2-1} \geqslant 1 \iff$ ....
   D'où l'ensemble solution $S =$ ....

4 COURBE REPRÉSENTATIVE : VIDÉO 6

CONVEXITÉ

La fonction exponentielle est .... sur $\mathbb{R}$

✳ DÉMONSTRATION
La fonction exponentielle est dérivable sur $\mathbb{R}$ et est égale à sa dérivée.

Par conséquent, la dérivée seconde est ....

LIMITES

$$\lim_{x \to -\infty} e^x = . \qquad \text{et} \qquad \lim_{x \to +\infty} e^x = ...$$

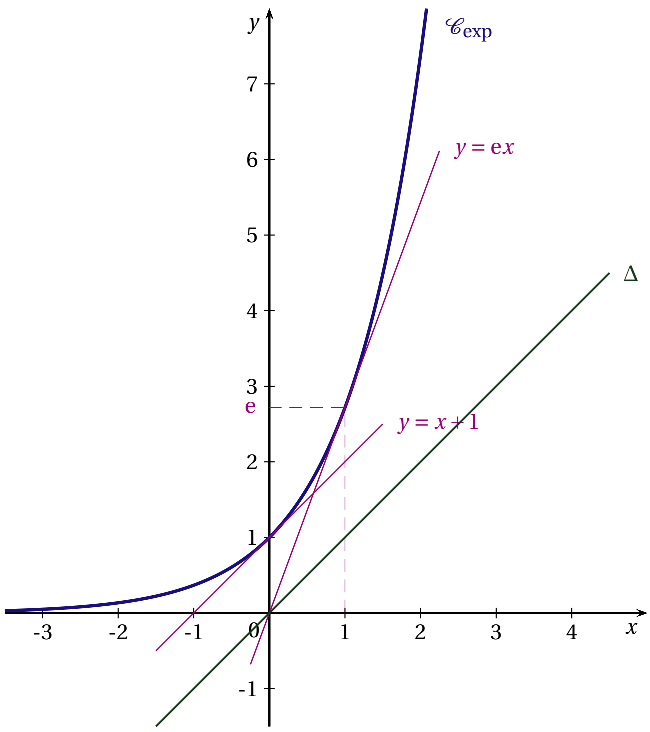
$e > 1$ alors $\lim\limits_{n \to +\infty} e^n =$ ..... Par prolongement, $\lim\limits_{x \to +\infty} e^x =$ ....

$e^{-n} = \dfrac{1}{e^n} = \left(\dfrac{1}{e}\right)^n$ d'où $\lim\limits_{n \to -\infty} e^n = \lim\limits_{n \to +\infty} \left(\dfrac{1}{e}\right)^n$ ....

Par prolongement, $\lim\limits_{x \to -\infty} e^x =$.

PROPRIÉTÉS

1. Équation de la tangente au point d'abscisse 0 : ....
2. Équation de la tangente au point d'abscisse 1 : $y = \exp'(1) \times (x-1) + \exp(1)$ Soit ......
3. La courbe représentative de la fonction exponentielle est située .... de la droite Δ d'équation ......



III EXPONENTIELLE D'UNE FONCTION : $\exp(u)$: VIDÉO 7

On considère une fonction u définie sur un intervalle I et la fonction f notée $f = \mathrm{e}^u$. EXEMPLES La fonction f définie pour tout réel x par $f(x) = \mathrm{e}^{0,5x-3}$. On a $u(x) = 0,5x - 3$ avec $f = \mathrm{e}^u$.

1 DÉRIVÉE

Soit u une fonction définie et dérivable sur un intervalle I. La fonction e^u est dérivable sur I et

$$(\mathrm{e}^u)' = \dots\dots\dots$$

EXEMPLES

1. Soit f la fonction définie pour tout réel x par $f(x) = \mathrm{e}^{-x}$.
   Pour tout réel x, on pose $u(x) = -x$. u est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $u'(x) = \dots$ Donc f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $f'(x) = \dots\dots$
2. Soit f la fonction définie pour tout réel x par $f(x) = \mathrm{e}^{0,5x^2-2x+1}$.
   Pour tout réel x, posons $u(x) = 0,5x^2 - 2x + 1$. u est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $u'(x) = \dots\dots$
   Donc f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $f'(x) = \dots\dots\dots\dots\dots\dots$