Cours sur les suites arithmético-géométriques

1. Généralités avec les suites (rappels) :

1.1 Suite définie de manière explicite :

Une suite (u_n) est définie de **manière explicite** si son terme général s’écrit en fonction de n.

Exemple :

On définit la suite (u_n) définie pour tout entier n, tel que $u_n = 2n+3$

1.2. Suite définie par une relation de récurrence :

Une suite (u_n) est définie par récurrence

- si on connaît **son premier terme**
- si son terme général s’écrit en fonction de **termes précédents**.

Exemple :

On définit la suite (u_n) définie pour tout entier n, tel que $\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = 2u_n + 1 \end{cases}$

On a alors par exemple : $u_1 = 2u_0 + 1 = 2 + 1 = 3$

2. Suites arithmétiques (rappels):

2.1. Définition :

Une suite arithmétique (u_n) est définie par la donnée

- d'un premier terme u_0,
- d'une raison r
- de la formule de récurrence : $u_{n+1} = u_n + r$

Exemple :

On définit la suite (u_n) définie pour tout entier n, tel que $\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = u_n + 3 \end{cases}$

2.2. Expression de u_n en fonction de n

(u_n) une suite arithmétique de premier terme u_0 et de raison r si et seulement si , pour tout entier n, on a $u_n = u_0 + n \times r$

Exemple :

On définit la suite (u_n) définie pour tout entier n, tel que $\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = u_n + 3 \end{cases}$

La suite (u_n) est une suite arithmétique de premier terme $u_0 = 1$ et de raison $r = 3$

on a donc $u_n = 1 + n \times 3 = 1 + 3n$

2.3. Sens de variation d'une suite arithmétique

Soit (u_n) une suite arithmétique de premier terme u_0 et de raison r.

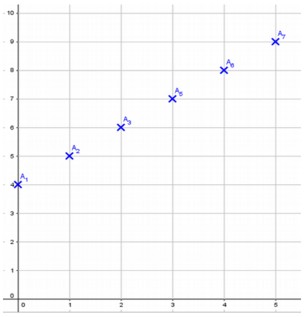
◦ Si $r > 0$ alors la suite (u_n) est strictement croissante

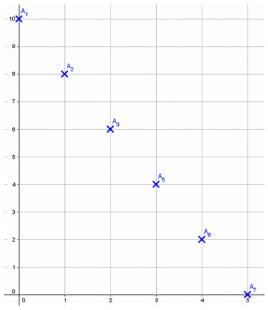
◦ Si $r < 0$ alors la suite (u_n) est strictement décroissante

2.4. Définition :

Dans le cas d'une suite arithmétique, on parle d'une évolution linéaire.

La représentation graphique donne une droite.





3. Suites géométriques :

3.1. Rappels :

Définition :

Une suite géométrique (u_n) est définie par la donnée d'un premier terme u_0 , d'une raison q et de la formule de récurrence : $u_{n+1}=q\times u_n$

Exemple :

On définit la suite (u_n) définie pour tout entier n , tel que $\begin{cases} u_0=1 \\ u_{n+1}=3\times u_n \end{cases}$

3.2. Terme général d'une suite géométrique :

Soit (u_n) une suite géométrique de premier terme u_0 et de raison q , alors $u_n=u_0\times q^n$

Exemple :

On définit la suite (u_n) définie pour tout entier n , tel que $\begin{cases} u_0=1 \\ u_{n+1}=3\times u_n \end{cases}$

On observe que (u_n) est une suite géométrique de premier terme $u_0=1$ et de raison $q=3$, donc $u_n=u_0\times q^n=1\times 3^n=3^n$

3.3. Terme général quand on ne connaît pas u_0 :

Soit (u_n) une suite géométrique de raison $q\neq 0$, alors pour tout entier naturel n et p, on a $u_n=u_p\times q^{n-p}$

Exemple :

Soit (u_n) une suite géométrique de raison $q=2$, tel que $u_7=4{,}2$.

Déterminer l'expression de son terme général.

Rédaction :

On sait que (u_n) une suite géométrique alors pour tout entier naturel n, on a $u_n=u_p\times q^{n-p}$ donc en particulier, ici : $u_n=u_7\times 2^{n-7}=4{,}2\times 2^{n-7}$

3.4.Sens de variation d'une suite q^n

La suite géométrique de terme général $u_n=q^n$ est

- Strictement croissante si $q>1$
- Strictement décroissante, si $0<q<1$

Démonstration :

On calcule $u_{n+1}-u_n=q^{n+1}-q^n=q^n(q-1)$

On étudie le signe de $q^n(q-1)$

- Si $0<q<1$, $q^n>0$ et $(q-1)<0$, donc $q^n(q-1)<0$ donc $u_{n+1}-u_n<0$ et (u_n) est décroissante.
- Si $q>1$, $q^n>0$ et $(q-1)>0$, donc $q^n(q-1)>0$ donc $u_{n+1}-u_n>0$ et (u_n) est croissante.

Exemple :

Déterminer les variations de la suite (u_n) de terme général $u_n=0{,}7^n$

Rédaction :

On reconnaît la forme d'une suite géométrique, $u_n=u_0\times q^n$ avec $u_0=1$ et $q=0{,}7$

D'après le résultat de cours, comme $q=0{,}7<1$, la suite $u_n=0{,}7^n$ est strictement décroissante.

Remarque :

Ce résultat est cohérent avec ceux travaillés avec les augmentations/réductions en pourcentage :

Multiplier par 0,7 revient à baisser de 30 %. Chaque terme de la suite est donc une réduction du précédent de 30 %. Cette suite tend naturellement vers 0.

Inversement, si $q>1$, cela revient à augmenter chaque terme d'un certain pourcentage. Si $q=1{,}1$, chaque terme de la suite est donc une augmentation du précédent de 10 %. Cette suite tend naturellement vers $+\infty$.

3.5. Sens de variation d'une suite géométrique

Soit (u_n) une suite géométrique de premier terme $u_0>0$ et de raison $q>0$.

◦ Si $q>1$ alors la suite (u_n) est strictement croissante

◦ Si $0<q<1$ alors la suite (u_n) est strictement décroissante

Démonstration :

Soit (u_n) une suite géométrique de premier terme $u_0>0$ et de raison $q>0$.

On a alors $u_n=u_0\times q^n$ et $u_{n+1}-u_n=u_0\times q^{n+1}-u_0\times q^n=u_0\times q^n(q-1)$

Comme $u_0>0$, le signe de $u_{n+1}-u_n$ ne dépend que de $q^n(q-1)$ ce qui revient à la démonstration précédente.

Exemple :

Déterminer les variations de la suite (u_n) définie pour tout entier n par son terme général $u_n=0{,}4\times 1{,}2^n$

Rédaction :

$u_n=0{,}4\times 1{,}2^n$ est l'expression du terme général d'une suite géométrique $u_n=u_0\times q^n$

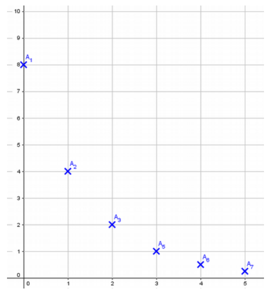
avec de premier terme $u_0=0{,}4$ et de raison : $q=1{,}2$.

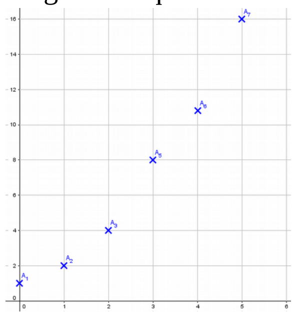
On a $u_0>0$ et $q=1{,}2>1$. Par application du résultat de cours, la suite (u_n) est strictement croissante.

Remarque :

- Le cas où $u_0<0$ n'est pas au programme.

- De même, le cas où $q<0$ n'est pas abordé. Avec une raison négative, les termes d'une suite géométrique sont de signes alternés. La suite n'admet alors pas de limites.





3.6. Evolution d'une suite géométrique :

Définition :

Dans le cas d'une suite géométrique, on parle d'une croissance

(ou décroissance) **exponentielle**.

3.7. Limite d'une suite géométrique

Soit (u_n) une suite géométrique, définie pour tout entier n par son terme général $u_n=q^n$.

◦ Si $q>1$ alors la suite (q^n) a pour limite $+\infty$ quand n tend vers l'infini. On note : $\lim_{n\to+\infty} q^n=+\infty$

◦ Si $0<q<1$ alors la suite (q^n) a pour limite 0 quand n tend vers l'infini. On note : $\lim_{n\to+\infty} q^n=0$

Exemple :

Déterminer la limite de la suite (u_n) définie pour tout entier n par son terme général $u_n=0{,}4^n$

Rédaction :

$u_n=0{,}4^n$ est l'expression du terme général d'une suite géométrique $u_n=q^n$ avec la raison : $q=0{,}4$.

On a $q=0{,}4<1$. Par application du résultat de cours, $\lim_{n\to+\infty} 0{,}4^n=0$ donc $\lim_{n\to+\infty} u_n=0$

3.8. Algorithme de seuil :

Principe :

L'idée est d'utiliser un algorithme qui permet d'obtenir le seuil à partir duquel le terme général d'une suite géométrique est inférieur ou supérieur à un seuil donné.
L'algorithme n'est jamais à rédiger complètement, il est souvent donné, éventuellement à compléter.

Exemple :

Soit (u_n) la suite géométrique de raison 0,96 et de premier terme $u_0=50000$
On se demande, s'il existe un entier p à partir duquel, on aura $u_n<30000$ pour tout $n>p$

Le terme général de (u_n) est donc, pour tout entier naturel n , de la forme : $u_n=50\,000\times0{,}96^n$

Comme $0<0{,}96<1$ la suite (u_n) est décroissante et converge vers 0 : $\lim_{n\to+\infty} 50\,000\times0{,}96^n=0$

Comme $u_0=50000$, il existe bien un seuil à partir duquel on aura $u_n<30000$, c'est à dire , $50\,000\times0{,}96^n<30000$
Il faut donc déterminer le plus petit entier p tel que pour tout entier $n>p$, $u_n<30000$
L'idée est d'utiliser un algorithme :

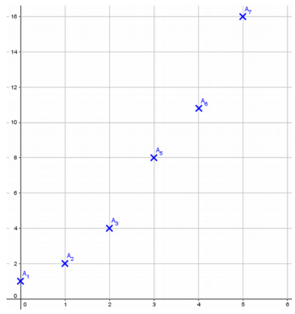
$U \leftarrow 50000$
$p \leftarrow 0$
$Tant\ que\ U \geq 30000$
  $p \leftarrow p+1$
  $U \leftarrow 0{,}96\times U$
$Fin\ de\ Tant\ que$

Pour lire l'algorithme, on peut s'aider d'un tableau :

	initialisation	Tour 1	Tour 2	Tour 3	Tour 4	….
U	50000	48000	46080	44236,8	42467,328	...
p	0	1	2	3	4	...

Vous devez savoir programmer votre calculatrice, un tableur ou programmer

Sortie de l'algorithme :
Le programme affiche 13. Donc pour tout entier $n>13$, on a $50000\times 0{,}96^{n}<30000$



4. Somme de termes d'une suite géométrique

4.1. Somme de puissances consécutives

Si $q\neq 1$ alors $1+q+q^2+q^3+.....+q^n=\dfrac{1-q^{n+1}}{1-q}$

Démonstration :

On effectue le produit : $(1+q+q^2+q^3+.....+q^n)\times(1-q)$:

$$(1+q+q^2+q^3+.....+q^n)\times(1-q)=1+q+q^2+q^3+.....+q^n-(q+q^2+q^3+.....+q^n+q^{n+1})$$

$$(1+q+q^2+q^3+.....+q^n)\times(1-q)=1+q+q^2+q^3+.....+q^n-q-q^2-q^3+.....-q^n-q^{n+1}$$

$$(1+q+q^2+q^3+.....+q^n)\times(1-q)=1-q^{n+1}$$

Comme $q\neq 1$, il vient $1+q+q^2+q^3+.....+q^n=\dfrac{1-q^{n+1}}{1-q}$

Exemple :

Calculer la somme des 7 premières puissances de 2 :

Rédaction :

On applique le résultat de cours $1+q+q^2+q^3+.....+q^n=\dfrac{1-q^{n+1}}{1-q}$ avec $q=2$ et $n=6$

$$1+2+2^2+2^3+2^4+2^5+2^6=\frac{1-2^7}{1-2}=\frac{-127}{-1}=127$$

4.2. Somme de termes consécutifs d'une suite géométrique :

Soit (u_n) une suite géométrique de premier terme u_0 et de raison q , et S_n la somme des n premiers termes de la suite : $S_n=u_0+u_1+u_2+.....+u_n$ alors $S_n=u_0\times\dfrac{1-q^{n+1}}{1-q}$

Démonstration :

$S_n=u_0+u_1+u_2+.....+u_n$ donc $S_n=u_0+u_0\times q+u_0\times q^2+.....+u_0\times q^n$

$$S_n=u_0+u_0\times q+u_0\times q^2+.....+u_0\times q^n=u_0\left(1+q+q^2+q^3+.....+q^n\right)=u_0\times\left(\frac{1-q^{n+1}}{1-q}\right)$$

Exemple :

Calculer la somme des 10 premiers termes de la suite géométrique (u_n) de premier terme $u_0=3$ et de raison $q=0,8$.

Rédaction :

D'après le cours, pour tout entier n , on a : $S_n=u_0\times\frac{1-q^{n+1}}{1-q}$

On a donc ici : $S_{10}=3\times\frac{1-0,8^{11}}{1-0,8}=3\times\frac{1-0,8^{11}}{0,2}\approx 13,7$

5. Suites arithmético-géométriques :

5.1. Relation de récurrence :

Définition :

(u_n) est une suite arithmético-géométrique, si pour tout entier n , elle vérifie, à partir d'un premier terme u_0 donné , une relation de récurrence de la forme : $u_{n+1}=a\,u_n+b$, avec a et b deux nombres réels.

Exemple :

Soit (u_n) une suite définie pour tout entier n , par la relation $\begin{cases}u_0=3\\u_{n+1}=3\,u_n+2\end{cases}$

On a : $u_1=3\times 3+2=11$; $u_2=3\times 11+2=35$; $u_2=3\times 35+2=107$ etc.

On vérifie aisément qu'il n'y a pas de raison additive ni multiplicative. Cette suite n'est donc ni arithmétique, ni géométrique.

Remarque :

- Si $b=0$, alors la relation de récurrence devient $u_{n+1}=a\,u_n$ et (u_n) est alors

  une suite géométrique de raison a **.**
- Si $a=1$, alors la relation de récurrence devient $u_{n+1}=u_n+b$ et (u_n) est alors

  une suite arithmétique de raison b **.**

5.2. Représentation graphique :(pas explicitement au programme)

Méthode à partir d'un exemple :

Soit (u_n) une suite définie pour tout entier n , par la relation $\begin{cases}u_0=10\\u_{n+1}=0,5\times u_n+2\end{cases}$

On reconnaît bien une suite arithmético-géométrique.

1. Recherche de la fonction associée :

Soit f la fonction associée à (u_n) telle que $u_{n+1}=f(u_n)$ .On a pour tout $x\in\mathbb{R}$, $f(x)=0,5\,x+2$

2. Représentation graphique des fonctions :

Représenter dans le même repère la fonction f associée et de la fonction définie pour tout $x\in\mathbb{R}$, $g(x)=x$.

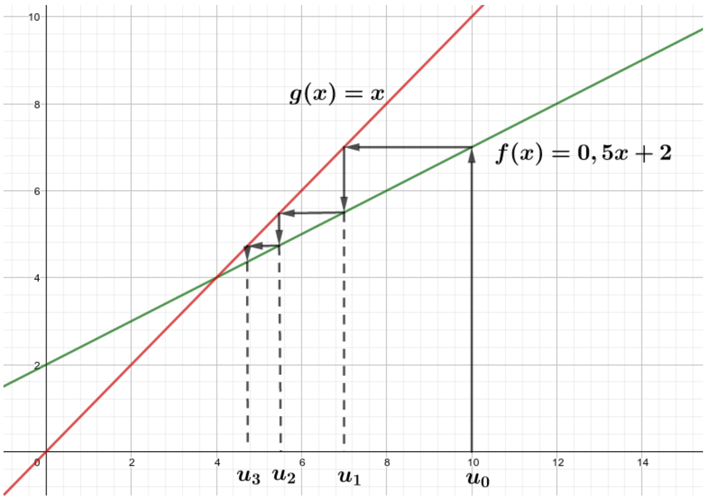
3.Algorithme de construction :

- Placer $u_0=10$ sur l'axe des abscisses
- Chercher $u_1=f(u_0)=f(10)=7$
- Pour placer u_1 sur l'axe des abscisses,

  on cherche l'intersection avec la représentation

  de $g(x)=x$
- Placer $u_1=7$ sur l'axe des abscisses
- Chercher $u_2=f(u_1)=f(7)=5{,}5$
- Pour placer u_2 sur l'axe des abscisses,

  on cherche l'intersection avec la représentation de $g(x)=x$ etc...



On observe graphiquement que la suite (u_n) semble tendre vers 4.

Attention, ceci n'est pas une démonstration. C'est une illustration.

Application : (sujet Bac 2009 - ancien programme!!)

Soit (u_n) la suite définie par $u_0=8$ et pour tout entier naturel n , $u_{n+1}=0{,}85\,u_n+1{,}8$.

1. Dans un repère orthonormé, tracer les droites d'équations respectives $y=0{,}85\,x+1{,}8$ et $y=x$.
2. Dans ce repère, placer u0 sur l'axe des abscisses, puis en utilisant les droites précédemment tracées, construire sur le même axe u_1 , u_2 et u_3 . On laissera apparent les traits de construction.
3. À l'aide du graphique, conjecturer la limite de la suite (u_n) .

5.3. Terme général d'une suite arithmético-géométrique

Il n'est pas au programme de savoir déterminer directement la formule explicite d'une suite arithmético-géométrique.

C'est l'objet de nombreux exercices « classiques » qui guident la démarche. Le stratégie consiste à s'appuyer sur une suite géométrique « auxiliaire » (toujours donnée par l'énoncé) pour y arriver.

Application :(extrait annales

Une revue spécialisée est diffusée uniquement par abonnement.

On estime que chaque année 85 % des abonnés renouvelleront leur abonnement et que 12 mille nouvelles personnes souscriront un abonnement.
En 2015, il y avait 40 mille abonnés à cette revue.
On note a_n le nombre de milliers d'adhérents pour l'année $2015+n$; on a donc $a_0=40$.
1. Pour tout entier naturel n , exprimer a_{n+1} en fonction de an .
2. On considère l'algorithme suivant :

```
N ← 0
A ← 40
Tant que A ≤ S
    A ← 0,85 × A + 12
    N ← N + 1
Fin Tant que
```

Interpréter ce résultat.
3. Soit la suite (u_n) définie par $u_n=a_n-80$ pour tout $n>0$.

a. Montrer que la suite (u_n) est une suite géométrique dont on précisera la raison et le premier terme.
b. Démontrer que, pour tout entier naturel n, $a_n = 80 - 40 \times 0{,}85n$.
c. Selon ce modèle, le directeur de cette revue peut-il envisager de la diffuser à 100 mille exemplaires?

Exercice corrigé par Arie Yallouz :

EXEMPLE

Chloé dépose 1000 € sur un compte d'épargne rémunéré au taux mensuel de 0,2% et choisit d'y ajouter à la fin de chaque mois la somme de 250 €. On note u_n le montant, en euros, du capital acquis au bout de n mois.

1. *Exprimer u_{n+1} en fonction de u_n.*
   Le coefficient multiplicateur associé à un taux d'intérêt de 0,2% est 1,002.
   Donc pour tout entier n, $u_{n+1} = 1{,}002 \times u_n + 250$.
2. *Soit (v_n) la suite définie pour tout entier n, par $v_n = u_n + 125\,000$. Montrer que v_n est une suite géométrique dont on précisera la raison et le premier terme.*
   Pour tout entier n,
   $$\begin{aligned} v_{n+1} &= u_{n+1} + 125000 \\ &= 1{,}002 \times u_n + 125250 \\ &= 1{,}002 \times (u_n + 125000) \\ &= 1{,}002 \times v_n \end{aligned}$$
   Ainsi, (v_n) est une suite géométrique de raison 1,002 et de premier terme $v_0 = 1000 + 125000 = 126000$.
3. *Exprimer u_n en fonction de n.*
   (v_n) est une suite géométrique de raison 1,002 et de premier terme $v_0 = 126\,000$ donc pour tout entier n, $v_n = 126\,000 \times 1{,}002^n$.
   Donc pour tout entier n, $u_n = 126\,000 \times 1{,}002^n - 125000$.
4. *Étude de la suite (u_n).*
   a) *Variation*
   Pour tout entier n, $u_n = 126000 \times 1{,}002^n - 125\,000$. Par conséquent, pour tout entier n,
   $$\begin{aligned} u_{n+1} - u_n &= \left(126000 \times 1{,}002^{n+1} - 125000\right) - \left(126000 \times 1{,}002^n - 125000\right) \\ &= 126000 \times 1{,}002^{n+1} - 126000 \times 1{,}002^n \\ &= 126000 \times 1{,}002^n \times (1{,}002 - 1) \\ &= 252 \times 1{,}002^n \end{aligned}$$
   D'où $u_{n+1} - u_n > 0$. Donc la suite (u_n) est strictement croissante.

   b) *Limite*
   Comme $1{,}002 > 1$, $\lim\limits_{n \to +\infty} 1{,}002^n = +\infty$ donc $\lim\limits_{n \to +\infty} 126\,000 \times 1{,}002^n - 125000 = +\infty$.

   c) *Combien de mois sont nécessaires pour que le montant du capital disponible dépasse 15000 € ?*
   On cherche à déterminer le plus petit entier n_0 tel que pour tout entier $n \geqslant n_0$, $u_n > 15000$.
   L'algorithme suivant permet d'obtenir le seuil à partir duquel le terme général de la suite (u_n) est supérieur à 15 000.

```
U ← 1000
N ← 0
Tant que U ⩽ 15000
    U ← 1,002 × U + 250
    N ← N + 1
Fin Tant que
```

   La valeur de la variable N obtenue à la fin de l'exécution de cet algorithme est 53.
   Donc le capital disponible dépassera 15 000 € au bout de 53 mois.