

1. Généralités avec les suites (rappels) :

1.1 Suite définie de manière explicite :

Une suite (u_n) est définie de **manière explicite** si son terme général s'écrit en fonction de n .

Exemple :

On définit la suite (u_n) définie pour tout entier n , tel que $u_n = 2n + 3$

1.2. Suite définie par une relation de récurrence :

Une suite (u_n) est définie par récurrence

- si on connaît **son premier terme**
- si son terme général s'écrit en fonction de **termes précédents**.

Exemple :

On définit la suite (u_n) définie pour tout entier n , tel que
$$\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = 2u_n + 1 \end{cases}$$

On a alors par exemple : $u_1 = 2u_0 + 1 = 2 + 1 = 3$

2. Suites arithmétiques (rappels):

2.1. Définition :

Une suite arithmétique (u_n) est définie par la donnée

- d'un premier terme u_0 ,
- d'une raison r
- de la formule de récurrence : $u_{n+1} = u_n + r$

Exemple :

On définit la suite (u_n) définie pour tout entier n , tel que
$$\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = u_n + 3 \end{cases}$$

2.2. Expression de u_n en fonction de n .

(u_n) une suite arithmétique de premier terme u_0 et de raison r si et seulement si, pour tout entier n , on a $u_n = u_0 + n \times r$

Exemple :

On définit la suite (u_n) définie pour tout entier n , tel que
$$\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = u_n + 3 \end{cases}$$

La suite (u_n) est une suite arithmétique de premier terme $u_0 = 1$ et de raison $r = 3$

on a donc $u_n = 1 + n \times 3 = 1 + 3n$

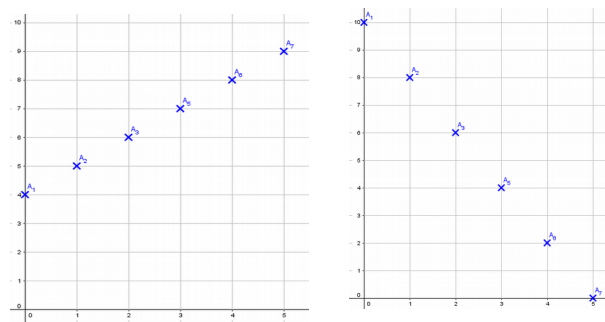
2.3. Sens de variation d'une suite arithmétique

Soit (u_n) une suite arithmétique de premier terme u_0 et de raison r .

- Si $r > 0$ alors la suite (u_n) est strictement croissante
- Si $r < 0$ alors la suite (u_n) est strictement décroissante

2.4. Définition :

Dans le cas d'une suite arithmétique, on parle d'une évolution linéaire.
La représentation graphique donne une droite.



3. Suites géométriques :

3.1. Rappels :

Définition :

Une suite géométrique (u_n) est définie par la donnée d'un premier terme u_0 , d'une raison q et de la formule de récurrence : $u_{n+1} = q \times u_n$

Exemple :

On définit la suite (u_n) définie pour tout entier n , tel que
$$\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = 3 \times u_n \end{cases}$$

3.2. Terme général d'une suite géométrique :

Soit (u_n) une suite géométrique de premier terme u_0 et de raison q , alors $u_n = u_0 \times q^n$

Exemple :

On définit la suite (u_n) définie pour tout entier n , tel que
$$\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = 3 \times u_n \end{cases}$$

On observe que (u_n) est une suite géométrique de premier terme $u_0 = 1$ et de raison $q = 3$, donc $u_n = u_0 \times q^n = 1 \times 3^n = 3^n$

3.3. Terme général quand on ne connaît pas u_0 :

Soit (u_n) une suite géométrique de raison $q \neq 0$, alors pour tout entier naturel n et p , on a $u_n = u_p \times q^{n-p}$

Exemple :

Soit (u_n) une suite géométrique de raison $q = 2$, tel que $u_7 = 4,2$.

Déterminer l'expression de son terme général.

Rédaction :

On sait que (u_n) une suite géométrique alors pour tout entier naturel n , on a $u_n = u_p \times q^{n-p}$ donc en particulier, ici : $u_n = u_7 \times 2^{n-7} = 4,2 \times 2^{n-7}$

3.4. Sens de variation d'une suite q^n

La suite géométrique de terme général $u_n = q^n$ est

- Strictement croissante si $q > 1$
- Strictement décroissante, si $0 < q < 1$

Démonstration :

On calcule $u_{n+1} - u_n = q^{n+1} - q^n = q^n(q-1)$

On étudie le signe de $q^n(q-1)$

- Si $0 < q < 1$, $q^n > 0$ et $(q-1) < 0$, donc $q^n(q-1) < 0$ donc $u_{n+1} - u_n < 0$ et (u_n) est décroissante.
- Si $q > 1$, $q^n > 0$ et $(q-1) > 0$, donc $q^n(q-1) > 0$ donc $u_{n+1} - u_n > 0$ et (u_n) est croissante.

Exemple :

Déterminer les variations de la suite (u_n) de terme général $u_n = 0,7^n$

Rédaction :

On reconnaît la forme d'une suite géométrique, $u_n = u_0 \times q^n$ avec $u_0 = 1$ et $q = 0,7$

D'après le résultat de cours, comme $q = 0,7 < 1$, la suite $u_n = 0,7^n$ est strictement décroissante.

Remarque :

Ce résultat est cohérent avec ceux travaillés avec les augmentations/réductions en pourcentage :

Multiplier par 0,7 revient à baisser de 30 %. Chaque terme de la suite est donc une réduction du précédent de 30 %. Cette suite est naturellement décroissante.

Inversement, si $q > 1$, cela revient à augmenter chaque terme d'un certain pourcentage. Si $q = 1,1$, chaque terme de la suite est donc une augmentation du précédent de 10 %. Cette suite est naturellement croissante.

3.5. Sens de variation d'une suite géométrique

Soit (u_n) une suite géométrique de premier terme $u_0 > 0$ et de raison $q > 0$.

- Si $q > 1$ alors la suite (u_n) est strictement croissante
- Si $0 < q < 1$ alors la suite (u_n) est strictement décroissante

Démonstration :

Soit (u_n) une suite géométrique de premier terme $u_0 > 0$ et de raison $q > 0$.

On a alors $u_n = u_0 \times q^n$ et $u_{n+1} - u_n = u_0 \times q^{n+1} - u_0 \times q^n = u_0 \times q^n(q-1)$

Comme $u_0 > 0$, le signe de $u_{n+1} - u_n$ ne dépend que de $q^n(q-1)$ ce qui revient à la démonstration précédente.

Exemple :

Déterminer les variations de la suite (u_n) définie pour tout entier n par son terme général $u_n = 0,4 \times 1,2^n$

Rédaction :

$u_n = 0,4 \times 1,2^n$ est l'expression du terme général d'une suite géométrique $u_n = u_0 \times q^n$

avec de premier terme $u_0 = 0,4$ et de raison : $q = 1,2$.

On a $u_0 > 0$ et $q = 1,2 > 1$. Par application du résultat de cours, la suite (u_n) est strictement croissante.

Remarque :

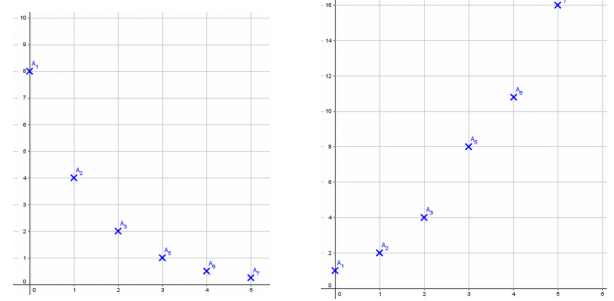
- Le cas où $u_0 < 0$ n'est pas au programme.

- De même, le cas où $q < 0$ n'est pas abordé. Avec une raison négative, les termes d'une suite géométrique sont de signes alternés. La suite n'est pas monotone.

3.6. Evolution d'une suite géométrique :

Définition :

Dans le cas d'une suite géométrique, on parle d'une croissance (ou décroissance) **exponentielle**.



3.7. Limite d'une suite géométrique

Soit (u_n) une suite géométrique, définie pour tout entier n par son terme général $u_n = q^n$.

- Si $q > 1$ alors la suite (q^n) a pour limite $+\infty$ quand n tend vers l'infini. On note : $\lim_{n \rightarrow +\infty} q^n = +\infty$
- Si $0 < q < 1$ alors la suite (q^n) a pour limite 0 quand n tend vers l'infini. On note : $\lim_{n \rightarrow +\infty} q^n = 0$

Exemple :

Déterminer la limite de la suite (u_n) définie pour tout entier n par son terme général $u_n = 0,4^n$

Rédaction :

$u_n = 0,4^n$ est l'expression du terme général d'une suite géométrique $u_n = q^n$ avec la raison : $q = 0,4$.

On a $q = 0,4 < 1$. Par application du résultat de cours, $\lim_{n \rightarrow +\infty} 0,4^n = 0$ donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0$

3.8. Algorithme de seuil :

Principe :

L'idée est d'utiliser un algorithme qui permet d'obtenir le seuil à partir duquel le terme général d'une suite géométrique est inférieur ou supérieur à un seuil donné.

L'algorithme n'est jamais à rédiger complètement, il est souvent donné, éventuellement à compléter.

Exemple :

Soit (u_n) la suite géométrique de raison $0,96$ et de premier terme $u_0 = 50000$

On se demande, s'il existe un entier p à partir duquel, on aura $u_n < 30000$ pour tout $n > p$

Le terme général de (u_n) est donc, pour tout entier naturel n , de la forme : $u_n = 50000 \times 0,96^n$

Comme $0 < 0,96 < 1$ la suite (u_n) est décroissante et converge vers 0 : $\lim_{n \rightarrow +\infty} 50000 \times 0,96^n = 0$

Comme $u_0 = 50000$, il existe bien un seuil à partir duquel on aura $u_n < 30000$, c'est à dire, $50000 \times 0,96^n < 30000$

Il faut donc déterminer le plus petit entier p tel que pour tout entier $n > p$, $u_n < 30000$

L'idée est d'utiliser un algorithme :

```

U ← 50000
p ← 0
Tant que U ≥ 30000
    p ← p+1
    U ← 0,96 × U
Fin de Tant que
  
```

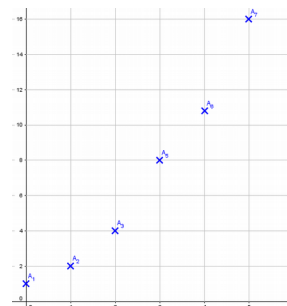
Pour lire l'algorithme, on peut s'aider d'un tableau :

	initialisation	Tour 1	Tour 2	Tour 3	Tour 4
U	50000	48000	46080	44236,8	42467,328	...
p	0	1	2	3	4	...

Vous devez savoir programmer votre calculatrice, un tableur ou programmer

Sortie de l'algorithme :

Le programme affiche 13. Donc pour tout entier $n > 13$, on a $50000 \times 0,96^n < 30000$



4. Somme de termes d'une suite géométrique

4.1. Somme de puissances consécutives

$$\text{Si } q \neq 1 \text{ alors } 1 + q + q^2 + q^3 + \dots + q^n = \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}$$

Démonstration :

On effectue le produit : $(1 + q + q^2 + q^3 + \dots + q^n) \times (1 - q)$:

$$(1 + q + q^2 + q^3 + \dots + q^n) \times (1 - q) = 1 + q + q^2 + q^3 + \dots + q^n - (q + q^2 + q^3 + \dots + q^n + q^{n+1})$$

$$(1 + q + q^2 + q^3 + \dots + q^n) \times (1 - q) = 1 + q + q^2 + q^3 + \dots + q^n - q - q^2 - q^3 + \dots - q^n - q^{n+1}$$

$$(1 + q + q^2 + q^3 + \dots + q^n) \times (1 - q) = 1 - q^{n+1}$$

Comme $q \neq 1$, il vient $1 + q + q^2 + q^3 + \dots + q^n = \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}$

Exemple :

Calculer la somme des 7 premières puissances de 2 :

Rédaction :

On applique le résultat de cours $1 + q + q^2 + q^3 + \dots + q^n = \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}$ avec $q = 2$ et $n = 6$

$$1 + 2 + 2^2 + 2^3 + 2^4 + 2^5 + 2^6 = \frac{1 - 2^7}{1 - 2} = \frac{-127}{-1} = 127$$

4.2. Somme de termes consécutifs d'une suite géométrique :

Soit (u_n) une suite géométrique de premier terme u_0 et de raison q , et S_n la somme des n premiers termes de la suite : $S_n = u_0 + u_1 + u_2 + \dots + u_n$ alors $S_n = u_0 \times \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}$

Démonstration :

$$S_n = u_0 + u_1 + u_2 + \dots + u_n \text{ donc } S_n = u_0 + u_0 \times q + u_0 \times q^2 + \dots + u_0 \times q^n$$

$$S_n = u_0 + u_0 \times q + u_0 \times q^2 + \dots + u_0 \times q^n = u_0 (1 + q + q^2 + q^3 + \dots + q^n) = u_0 \times \left(\frac{1 - q^{n+1}}{1 - q} \right)$$

Exemple :

Calculer la somme des 10 premiers termes de la suite géométrique (u_n) de premier terme $u_0 = 3$ et de raison $q = 0,8$.

Rédaction :

D'après le cours, pour tout entier n , on a : $S_n = u_0 \times \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}$

$$\text{On a donc ici : } S_{10} = 3 \times \frac{1 - 0,8^{11}}{1 - 0,8} = 3 \times \frac{1 - 0,8^{11}}{0,2} \approx 13,7$$

5. Suites arithmético-géométriques :

5.1. Relation de récurrence :

Définition :

(u_n) est une suite arithmético-géométrique, si pour tout entier n , elle vérifie, à partir d'un premier terme u_0 donné, une relation de récurrence de la forme : $u_{n+1} = a u_n + b$, avec a et b deux nombres réels.

Exemple :

Soit (u_n) une suite définie pour tout entier n , par la relation
$$\begin{cases} u_0 = 3 \\ u_{n+1} = 3u_n + 2 \end{cases}$$

On a : $u_1 = 3 \times 3 + 2 = 11$; $u_2 = 3 \times 11 + 2 = 35$; $u_3 = 3 \times 35 + 2 = 107$ etc.

On vérifie aisément qu'il n'y a pas de raison additive ni multiplicative. Cette suite n'est donc ni arithmétique, ni géométrique.

Remarque :

- Si $b = 0$, alors la relation de récurrence devient $u_{n+1} = a u_n$ et (u_n) est alors une suite géométrique de raison a .
- Si $a = 1$, alors la relation de récurrence devient $u_{n+1} = u_n + b$ et (u_n) est alors une suite arithmétique de raison b .

5.2. Représentation graphique :(pas explicitement au programme)

Méthode à partir d'un exemple :

Soit (u_n) une suite définie pour tout entier n , par la relation
$$\begin{cases} u_0 = 10 \\ u_{n+1} = 0,5 \times u_n + 2 \end{cases}$$

On reconnaît bien une suite arithmético-géométrique.

1. Recherche de la fonction associée :

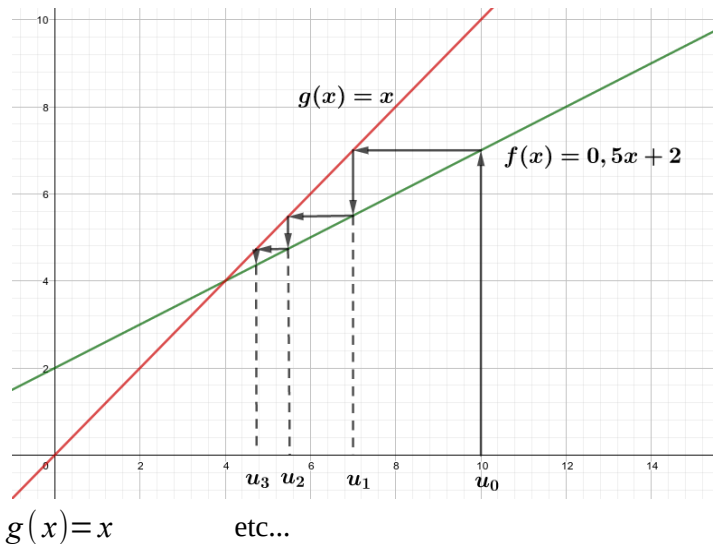
Soit f la fonction associée à (u_n) telle que $u_{n+1} = f(u_n)$. On a pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = 0,5x + 2$

2. Représentation graphique des fonctions :

Représenter dans le même repère la fonction f associée et de la fonction définie pour tout $x \in \mathbb{R}$, $g(x) = x$.

3. Algorithme de construction :

- Placer $u_0=10$ sur l'axe des abscisses
- Chercher $u_1=f(u_0)=f(10)=7$
- Pour placer u_1 sur l'axe des abscisses, on cherche l'intersection avec la représentation de $g(x)=x$
- Placer $u_1=7$ sur l'axe des abscisses
- Chercher $u_2=f(u_1)=f(7)=5,5$
- Pour placer u_2 sur l'axe des abscisses, on cherche l'intersection avec la représentation de $g(x)=x$



On observe graphiquement que la suite (u_n) semble tendre vers 4.

Attention, ceci n'est pas une démonstration. C'est une illustration.

Application : (sujet Bac 2009 - ancien programme!!)

Soit (u_n) la suite définie par $u_0=8$ et pour tout entier naturel n , $u_{n+1}=0,85u_n+1,8$.

1. Dans un repère orthonormé, tracer les droites d'équations respectives $y=0,85x+1,8$ et $y=x$.
2. Dans ce repère, placer u_0 sur l'axe des abscisses, puis en utilisant les droites précédemment tracées, construire sur le même axe u_1 , u_2 et u_3 . On laissera apparent les traits de construction.
3. À l'aide du graphique, conjecturer la limite de la suite (u_n) .

5.3. Terme général d'une suite arithmético-géométrique

Il n'est pas au programme de savoir déterminer directement la formule explicite d'une suite arithmético-géométrique.

C'est l'objet de nombreux exercices « classiques » qui guident la démarche. La stratégie consiste à s'appuyer sur une suite géométrique « auxiliaire » (toujours donnée par l'énoncé) pour y arriver.

Application : (extrait annales

Une revue spécialisée est diffusée uniquement par abonnement.

On estime que chaque année 85 % des abonnés renouvelleront leur abonnement et que 12 mille nouvelles personnes souscriront un abonnement.

En 2015, il y avait 40 mille abonnés à cette revue.

On note a_n le nombre de milliers d'adhérents pour l'année $2015+n$; on a donc $a_0=40$.

1. Pour tout entier naturel n , exprimer a_{n+1} en fonction de a_n .
2. On considère l'algorithme suivant :

```

N ← 0
A ← 40
Tant que A ≤ 5
  A ← 0,85 × A + 12
  N ← N + 1
Fin Tant que

```

Interpréter ce résultat.

3. Soit la suite (u_n) définie par $u_n=a_n-80$ pour tout $n>0$.

- Montrer que la suite (u_n) est une suite géométrique dont on précisera la raison et le premier terme.
- Démontrer que, pour tout entier naturel n , $a_n = 80 - 40 \times 0,85^n$.
- Selon ce modèle, le directeur de cette revue peut-il envisager de la diffuser à 100 mille exemplaires?

Exercice corrigé par Arie Yallouz :

EXEMPLE

Chloé dépose 1000 € sur un compte d'épargne rémunéré au taux mensuel de 0,2% et choisit d'y ajouter à la fin de chaque mois la somme de 250 €. On note u_n le montant, en euros, du capital acquis au bout de n mois.

- Exprimer u_{n+1} en fonction de u_n .

Le coefficient multiplicateur associé à un taux d'intérêt de 0,2% est 1,002.

Donc pour tout entier n , $u_{n+1} = 1,002 \times u_n + 250$.

- Soit (v_n) la suite définie pour tout entier n , par $v_n = u_n + 125\,000$. Montrer que v_n est une suite géométrique dont on précisera la raison et le premier terme.

Pour tout entier n ,

$$\begin{aligned} v_{n+1} &= u_{n+1} + 125\,000 \\ &= 1,002 \times u_n + 125\,250 \\ &= 1,002 \times (u_n + 125\,000) \\ &= 1,002 \times v_n \end{aligned}$$

Ainsi, (v_n) est une suite géométrique de raison 1,002 et de premier terme $v_0 = 1000 + 125\,000 = 126\,000$.

- Exprimer u_n en fonction de n .

(v_n) est une suite géométrique de raison 1,002 et de premier terme $v_0 = 126\,000$ donc pour tout entier n , $v_n = 126\,000 \times 1,002^n$.

Donc pour tout entier n , $u_n = 126\,000 \times 1,002^n - 125\,000$.

- Étude de la suite (u_n) .

- Variation

Pour tout entier n , $u_n = 126\,000 \times 1,002^n - 125\,000$. Par conséquent, pour tout entier n ,

$$\begin{aligned} u_{n+1} - u_n &= (126\,000 \times 1,002^{n+1} - 125\,000) - (126\,000 \times 1,002^n - 125\,000) \\ &= 126\,000 \times 1,002^{n+1} - 126\,000 \times 1,002^n \\ &= 126\,000 \times 1,002^n \times (1,002 - 1) \\ &= 252 \times 1,002^n \end{aligned}$$

D'où $u_{n+1} - u_n > 0$. Donc la suite (u_n) est strictement croissante.

- Limite

Comme $1,002 > 1$, $\lim_{n \rightarrow +\infty} 1,002^n = +\infty$ donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} 126\,000 \times 1,002^n - 125\,000 = +\infty$.

- Combien de mois sont nécessaires pour que le montant du capital disponible dépasse 15000 €?

On cherche à déterminer le plus petit entier n_0 tel que pour tout entier $n \geq n_0$, $u_n > 15\,000$.

L'algorithme suivant permet d'obtenir le seuil à partir duquel le terme général de la suite (u_n) est supérieur à 15 000.

```

U ← 1000
N ← 0
Tant que U ≤ 15000
    U ← 1,002 × U + 250
    N ← N + 1
Fin Tant que
  
```

La valeur de la variable N obtenue à la fin de l'exécution de cet algorithme est 53.

Donc le capital disponible dépassera 15 000 € au bout de 53 mois.