

Continuité sur un intervalle

1. Rappels sur la dérivabilité :

1.1. Tangente à la courbe (vidéo 1)

Si une fonction f est dérivable sur I , on appelle fonction dérivée de f la fonction notée f' définie sur I qui à tout antécédent a associe $f'(a)$, où $f'(a)$ est le **coefficient directeur de la tangente** à la courbe au point d'abscisse a .

Soit f une fonction définie sur un intervalle D et un point $M(a; f(a))$ tel que $a \in D$

La courbe représentative de la fonction f admet une tangente (T) au point M d'équation : $y = f'(a)(x - a) + f(a)$

Application :

f est une fonction dérivable sur $[-2; 3]$. On sait que $f(1) = 2$ et $f'(1) = -1$
Déterminer l'équation de la tangente à la courbe représentative de f en 1.

1.2. Les Formules de dérivabilité : (vidéo 2)

On rappelle les formules de dérivations des fonctions de références :

→ $f(x) = ax + b$	définie sur \mathbb{R}	a pour dérivée	$f'(x) = a$	définie sur \mathbb{R}
→ $f(x) = x^n$	définie sur \mathbb{R}	a pour dérivée	$f'(x) = n \times x^{n-1}$	définie sur \mathbb{R}
→ $f(x) = \frac{1}{x}$	définie sur \mathbb{R}^*	a pour dérivée	$f'(x) = -\frac{1}{x^2}$	définie sur \mathbb{R}^*
→ $f(x) = \sqrt{x}$	définie sur \mathbb{R}_+	a pour dérivée	$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$	définie sur \mathbb{R}_+

Soient u et v deux fonctions dérivables sur un intervalle I , et k un nombre réel.

→ La fonction $u + v$ est dérivable sur I et sa dérivée est $(u + v)' = u' + v'$

→ La fonction $k \times u$ est dérivable sur I et sa dérivée est $(k \times u)' = k \times u'$

→ La fonction $u \times v$ est dérivable sur I et sa dérivée est $(u \times v)' = u'v + uv'$

→ La fonction u^2 est dérivable sur I et sa dérivée est $u^2 = 2uu'$

→ La fonction $\frac{u}{v}$ est dérivable pour tout réel x de I vérifiant $v(x) \neq 0$ et sa dérivée est $\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$

→ La fonction $\frac{1}{v}$ est dérivable pour tout réel x de I vérifiant $v(x) \neq 0$ et sa dérivée est $\left(\frac{1}{v}\right)' = -\frac{v'}{v^2}$

Application :

Déterminer les dérivées des fonctions suivantes, définies sur $[1; 10]$

$$f(x) = 4x^3 - 5x^2 + 6x - 7 \quad g(x) = \frac{3}{x} - 4\sqrt{x} \quad h(x) = \sqrt{x}(x - 5) \quad i(x) = \frac{4 - 3x^2}{7x + 2}$$

1.3. Sens de variations et extremum : (vidéo 3)

◆ Propriété :

Soit f une fonction définie et dérivable sur un intervalle, I alors :

➤ f est croissante sur I équivaut à dire que pour tout x de I , $f'(x) \geq 0$

➤ f est décroissante sur I équivaut à dire que, pour tout x de I , $f'(x) \leq 0$

◆ Propriété :

➤ Si f admet un extremum local en x_0 , alors $f'(x_0) = 0$

➤ Si la dérivée f' s'annule en x_0 **en changeant de signe**, alors f admet un extremum local en x_0

Application :

Déterminer le sens de variation de la fonction f , définie sur \mathbb{R} par $f(x) = x^3 - x^2 - 2x - 1$.

La fonction admet-elle un maximum local ? Si oui, le préciser.

2. Continuité sur un intervalle :

2.1. Définition : (vidéo 4)

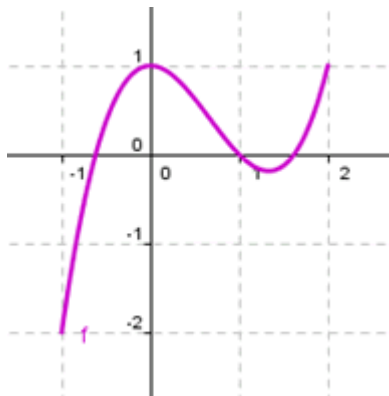
◆ Remarque :

La définition mathématique de la continuité d'une fonction sur un intervalle est hors programme. On se limitera ici à une définition intuitive et graphique qui nous suffira pour résoudre les problèmes proposés.

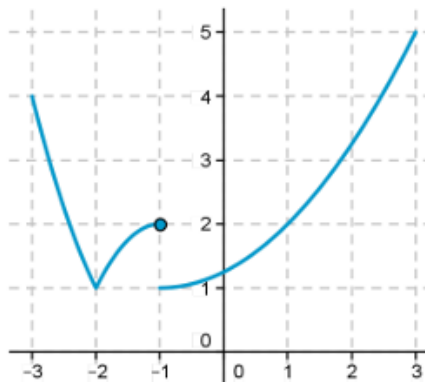
◆ Définition :

Soit une fonction f définie sur un intervalle I .

On dit que f est continue sur I si on peut tracer la courbe représentative de f sur I "sans lever le crayon".



On dit que la fonction représentée est continue sur $[-1; 2]$



On dit que la fonction représentée n'est pas continue sur $[-3; 3]$

Par contre, elle est continue sur $[-3; -1]$

◆ Convention :

Dans un tableau de variations de fonction, il est convenu que les flèches obliques indiquent que la fonction est continue et strictement monotone

2.2. Propriété (admise)

◆ Propriété :

Une fonction dérivable sur un intervalle I est aussi continue sur I .

◆ Conséquence :

Dès qu'on sait qu'une fonction est dérivable sur un intervalle, on peut en déduire qu'elle est continue sur cet intervalle.

Par exemple : Soit f la fonction définie sur \mathbb{R} par $f(x) = 4x^3 - 5x^2 + x - 1$

f étant une fonction polynôme, on sait qu'elle est dérivable sur \mathbb{R} par conséquent, f est continue sur \mathbb{R}

◆ Attention :

La réciproque est fautive :

f dérivable sur $I \Rightarrow f$ continue sur I mais f continue sur $I \not\Rightarrow f$ dérivable sur I

3. Utilisation de la continuité sur un intervalle :

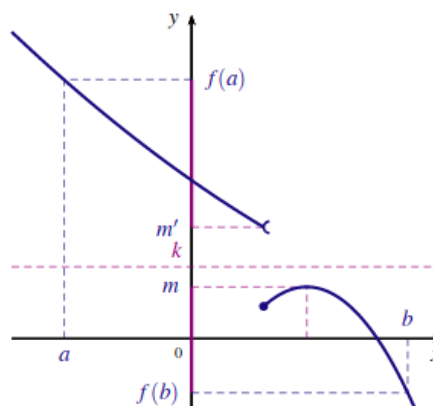
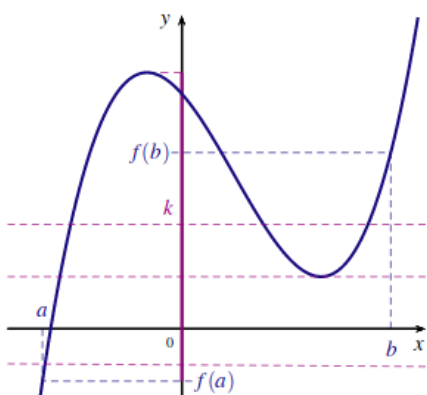
3.1. Théorème :

◆ Théorème des valeurs intermédiaires : (vidéo 5)

Si f est une fonction **continue** sur I , Si k est un nombre compris entre $f(a)$ et $f(b)$,

Alors l'équation $f(x) = k$ admet **au moins** une solution sur $[a; b]$.

Illustration :



La fonction f est bien continue sur $[a; b]$.
 L'image de l'intervalle $[a; b]$ est donc un intervalle.
 Tout réel k compris entre $f(a)$ et $f(b)$ est l'image d'au moins un élément de $[a; b]$.

La fonction f n'est pas continue sur $[a; b]$.

L'image de l'intervalle $[a; b]$ n'est pas un intervalle.

Il existe des réels k compris entre $f(a)$ et $f(b)$ pour lesquels l'équation $f(x) = k$ n'a pas de solution.

Application

La fonction f vérifie le tableau de variation ci-dessous.
 Montrer que l'équation $f(x) = 12$ admet au moins une solution sur $[-3; 7]$.

x	-3	1	2	7
$f(x)$	25	10	15	8

3.2. Corollaire:

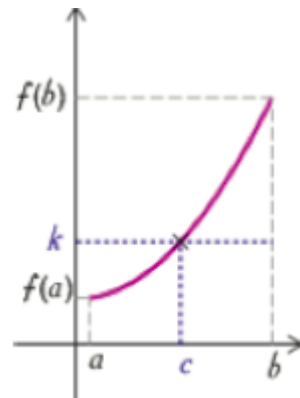
Propriété : (vidéo 6)

Soit f une fonction définie sur un intervalle I de \mathbb{R} et a, b deux réels appartenant à I , tels que $a < b$.
 Si f est continue et strictement monotone sur $[a; b]$,
 alors pour tout réel k compris entre $f(a)$ et $f(b)$, l'équation $f(x) = k$ admet une solution unique c appartenant à $[a; b]$.

Illustration :

On a f une fonction continue et strictement croissante sur $[a; b]$,
 elle est donc strictement monotone sur $[a; b]$

L'équation $f(x) = k$ admet donc une solution unique c appartenant à $[a; b]$.



Application :

La fonction f vérifie le tableau de variation ci-dessous.
 Montrer que l'équation $f(x) = 1$ admet une unique solution sur $] -\infty; 3]$

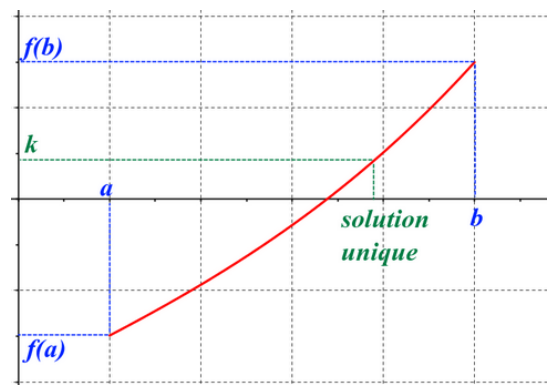
x	$-\infty$	-1	3
f	3	5	-1

3.3. Cas particulier :

Propriété : (vidéo 7)

Si f est continue et strictement monotone sur $[a; b]$
 et $f(a) \times f(b) < 0$ (c'est à dire que $f(a)$ et $f(b)$ sont de signes opposés),
 alors l'équation $f(x) = 0$ admet une solution unique dans $[a; b]$.

Illustration :



On a f continue et strictement croissante sur $[a; b]$ donc monotone sur $[a; b]$
On a aussi $f(a) < 0$ et $f(b) > 0$ donc on a bien $f(a) \times f(b) < 0$

L'équation $f(x) = 0$ admet une solution
unique dans $[a; b]$.

C'est un outil pratique pour prouver qu'une équation complexe du type $f(x) = 0$ possède une unique solution.

Application :

Montrer que l'équation $x^3 + x - 5 = 0$ admet une unique solution sur $[0; 3]$, dont on donnera une valeur approchée au dixième.