

Variations d'une fonction : exercices

Les réponses (non détaillées) aux questions sont disponibles à la fin du document

Exercice 1 :

Soit f la fonction définie sur \mathbb{R} par $f(x) = x^2 + 6x + 5$.

- 1) Etudier les variations de f sur \mathbb{R} .
- 2) Déterminer les coordonnées des points d'intersection entre la courbe représentative de f et la droite D d'équation $y = \frac{1}{2}x - 2$.

Exercice 2 :

Etudier les variations sur \mathbb{R} de la fonction f définie par $f(x) = 3x - 4x^3$.

Exercice 3 :

Soit f la fonction définie sur \mathbb{R} par $f(x) = \frac{-4x - 4}{x^2 + 2x + 5}$.

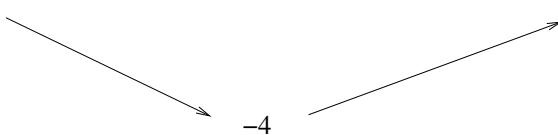
- 1) Etudier les variations de f sur \mathbb{R} .
- 2) Déterminer les coordonnées du point A , intersection entre la courbe représentative de f et l'axe des abscisses.
- 3) Déterminer une équation de la tangente T à la courbe représentative de f au point A .

Exercice 4 :

Etudier les variations sur $] -2; 1[$ de la fonction f définie par $f(x) = \frac{-5x^2 + 4x - 8}{x^2 + x - 2}$.

Réponses exercice 1 :

- 1) $f'(x) = 2x + 6$
 $(2x + 6)$ s'annule pour $x = -3$. "signe de $a = 2$ après le 0".

| | | | |
|---------|--|------|-----------|
| x | $-\infty$ | -3 | $+\infty$ |
| $f'(x)$ | - | 0 | + |
| $f(x)$ |  | | |

- 2) On résout l'équation $f(x) = \frac{1}{2}x - 2$. Après calcul, on obtient $x = -\frac{7}{2}$ ou $x = -2$.
 De plus, si $x = -\frac{7}{2}$ alors $\frac{1}{2}x - 2 = -\frac{15}{4}$ et si $x = -2$ alors $\frac{1}{2}x - 2 = -3$.
 Finalement, il y a 2 points d'intersection : $A\left(-\frac{7}{2}, -\frac{15}{4}\right)$ et $B(-2; -3)$.

Réponses exercice 2 :

$f'(x) = 3 - 12x^2 = 3(1 - 4x^2) = 3(1 - 2x)(1 + 2x)$
 $(1 - 2x)$ s'annule pour $x = \frac{1}{2}$. "signe de $a = -2$ après le 0".
 $(1 + 2x)$ s'annule pour $x = -\frac{1}{2}$. "signe de $a = 2$ après le 0".

| | | | | | |
|---------|-----------|--------|-------|-----------|---|
| x | $-\infty$ | $-1/2$ | $1/2$ | $+\infty$ | |
| $1-2x$ | + | | + | 0 | - |
| $1+2x$ | - | 0 | + | | + |
| $f'(x)$ | - | 0 | + | 0 | - |
| $f(x)$ | | | | | |

Réponses exercice 3 :

1) Après calcul, on a $f'(x) = \frac{4(x^2 + 2x - 3)}{(x^2 + 2x + 5)^2}$

Signe de $x^2 + 2x - 3$: $\Delta = 16 > 0$. Racines : -3 et 1 . "signe de $a = 1$ à l'extérieur des racines".

| | | | | | |
|----------------|-----------|------|-----|-----------|---|
| x | $-\infty$ | -3 | 1 | $+\infty$ | |
| x^2+2x-3 | + | 0 | - | 0 | + |
| $(x^2+2x+5)^2$ | + | | + | | + |
| $f'(x)$ | + | 0 | - | 0 | + |
| $f(x)$ | | | | | |

2) On résoud l'équation $f(x) = 0$. On obtient $x = -1$. Donc le point d'intersection est $A(-1; 0)$.

3) $T : y = f(-1) + f'(-1)(x + 1)$. $f(-1) = 0$ et $f'(-1) = -1$.

Finalement, $T : y = -x - 1$.

Réponses exercice 4 :

Après calcul, on a $f'(x) = \frac{-9x^2 + 36x}{(x^2 + x - 2)^2} = \frac{9x(4 - x)}{(x^2 + x - 2)^2}$.

$9x$ s'annule pour $x = 0$ et est évidemment positif après.

$(4 - x)$ s'annule pour $x = 4$. "signe de $a = -1$ après le 0".

Or l'intervalle d'étude $]-2; 1[$ se situe avant 4. $(4 - x)$ est donc positif sur $]-2; 1[$.

| | | | |
|---------------|------|-----|-----|
| x | -2 | 0 | 1 |
| $9x$ | - | 0 | + |
| $4-x$ | + | | + |
| $(x^2+x-2)^2$ | + | | + |
| $f'(x)$ | - | 0 | + |
| $f(x)$ | | | |