Les bases du calcul algébrique

1 Nature d'une expression algébrique

Objectif : Savoir déterminer si une expression est une somme ou un produit
Voir Vidéo 1

Exemples :

$3 \times x$ est un produit
$3 + x$ est une somme
$2 + 3 \times x$ est une somme
$(x+3)(2-x)$ est un produit
$(x+3)-(2-x)$ est une somme

2 Développer une expression algébrique

1 Distributivité simple

Voir Vidéo 2
La multiplication est distributive par rapport à l'addition c'est à dire, pour tous nombres réels a, b, et k, on a

$$k(a+b) = ka + kb$$

Application :

$$-3(4-x) = -12 + 3x$$

2 Double distributivité

La multiplication est distributive par rapport à l'addition c'est à dire, pour tous nombres réels a, b, c et d, on a

$$(a+b)(c+d) = ac + ad + bc + bd$$

Application :

$$\begin{aligned}(3-x)(2x-3) &= 6x - 9 - 2x^2 + 3x \\ &= -2x^2 + 9x - 9\end{aligned}$$

3 Développer une identité remarquable

Voir Vidéo 3
Propriété :
Pour tous nombres réels a et b on a

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$
$$(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$$
$$(a-b)(a+b) = a^2 - b^2$$

Application :

$$\begin{aligned}(3x+4)^2 &= (3x)^2 + 2 \times 3x \times 4 + 4^2 \\ &= 9x^2 + 24x + 9\end{aligned}$$
$$(6x-5)^2 = 36x^2 - 60x + 25$$
$$(7x-9)(7x+9) = 49x^2 - 81$$

3 Factoriser une expression algébrique

1 Avec un facteur commun

Rappels : Factoriser, c'est transformer une expression en produit.

Une stratégie consiste à isoler un **facteur commun** à chacun des termes. **Exemple** :
Factoriser :

$$\begin{aligned} A &= 14x^3 - 8x^2 + 6x \\ &= 7 \times 2 \times x \times x \times x - 4 \times 2 \times x \times x + 3 \times 2 \times x \\ &= 2x(7x^2 - 4x + 3) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} B &= (x+3)(4-x) - (x+3)(2x-5) \\ B &= (x+3)\big((4-x) - (2x-5)\big) \\ B &= (x+3)\big(4 - x - 2x + 5\big) \\ B &= (x+3)\big(9 - 3x\big) \end{aligned}$$

2 Avec les identités remarquables

Rappels : On peut utiliser les identités remarquables pour factoriser :

$$\begin{aligned} a^2 + 2ab + b^2 &= (a+b)^2 \\ a^2 - 2ab + b^2 &= (a-b)^2 \\ a^2 - b^2 &= (a+b)(a-b) \end{aligned}$$

Exemple : Factoriser :

$$\begin{aligned} B &= 25x^2 - 49 \\ &= (5x)^2 - 7^2 \\ &= (5x-7)(5x+7) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} C &= 1 - (2-x)^2 \\ &= \big(1 - (2-x)\big)\big(1 + (2-x)\big) \\ &= \big(1 - 2 + x\big)\big(1 + 2 - x\big) \\ &= \big(-1 + x\big)\big(3 - x\big) \end{aligned}$$

4 Résoudre une équation du premier degré

1 Tester une solution

Rappels : On appelle **solution** d'une équation une valeur qui rend l'équation vraie.

Exemple :
Le nombre -2 est-il solution de l'équation $7x - 3 = -8x + 1$?

On calcule séparément chaque membre en remplaçant x par -2 :

$$7x+6 = 7\times -2+6 = -8$$
$$-8x-10 = -8\times -2-10 = 6$$

On observe que pour $x=-2$, on a $7x-3 \neq -8x+1$
Le nombre -2 n'est donc pas solution de cette équation.

2 Résoudre une équation

Rappels : Pour résoudre une équation du premier degré il faut :

1. Développer et réduire, si besoi, chaque membre de l'équation
2. Regrouper les inconnues dans le membre de gauche de l'équation
3. Isoler les inconnues dans le membre de gauche de l'inconnue
4. Diviser par le coefficient devant l'inconnue du membre de gauche, s'il est non nul.

Exemple :
Résoudre dans $\mathbb{R}$, l'équation $5-2(2-x) = -3(3x-1)$

$$5-2(2-x) = -3(3x-1)$$

étape 1 : on développe chaque membre

$$5-4+2x = -9x+3$$

étape 2 : on regroupe les inconnues à gauche

$$1+2x+9x = 3$$

étape 3 : on isole les inconnues à gauche

$$11x = 2$$

étape 4 : on divise par $\dfrac{11}{2}$ chaque membre

$$x = \frac{11}{2}$$

$$S = \left\{ \frac{11}{2} \right\}$$