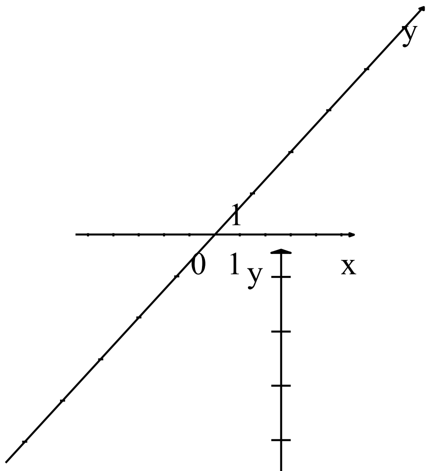
Coordonnées dans le plan

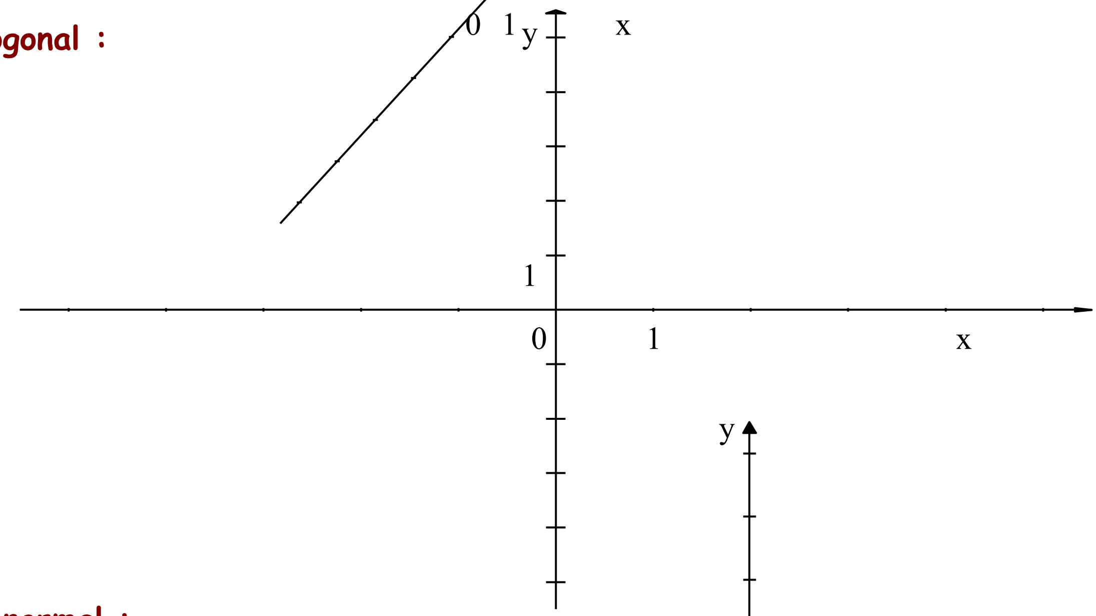
1. Repérer un point donné du plan, placer un point connaissant ses coordonnées.

1.1 Repères du plan (vidéo 1)

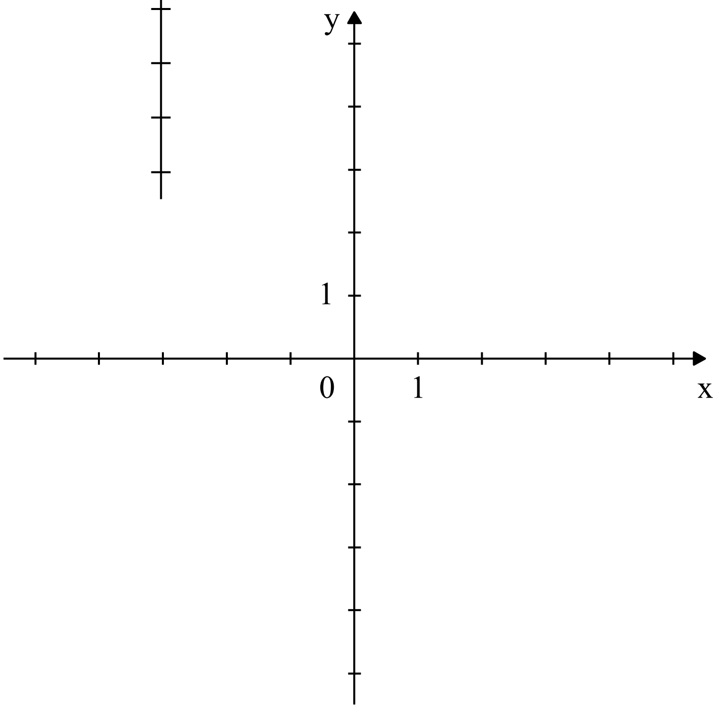
Repère quelconque :



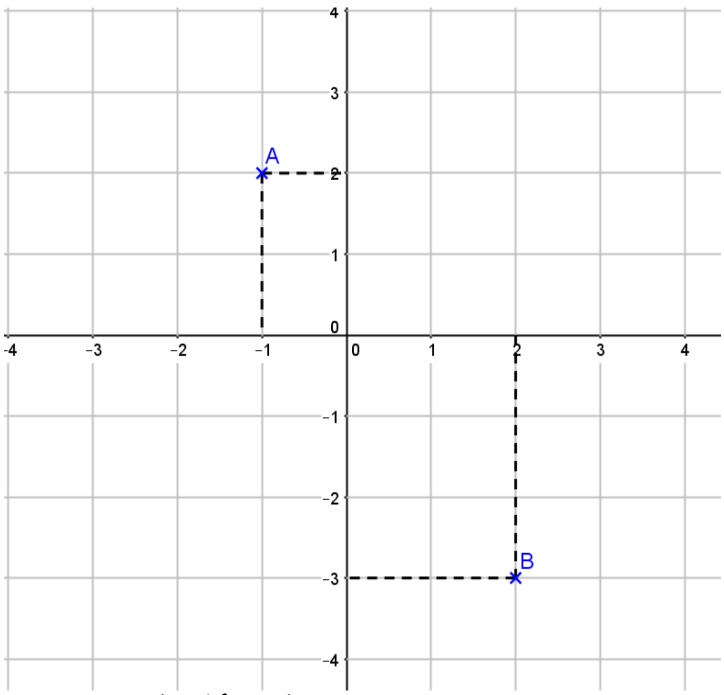
Repère orthogonal :



Repère orthonormal :



1.2. Coordonnées d'un point

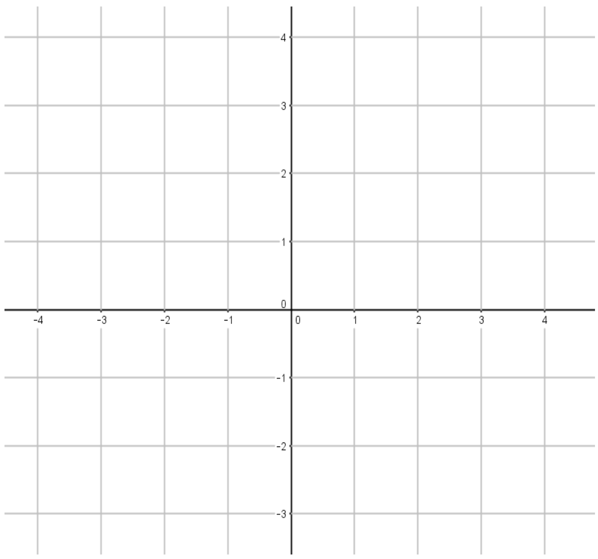


Lire les coordonnées des 3 points A, B et C.

Placer les points D, E et F de coordonnées :
E(4 ; 0)   F(-3;-3)   G(2;3)

2.Calculer les coordonnées du milieu d'un segment. (vidéo 2)

Exemple :



Placer dans le repère suivant deux point A et B tel que : A(3 ; 5) et B(-1 ; 1).
Essayez de placer le point M, milieu de [AB].
Quelles sont ses coordonnées ?
Sur le repère suivant, on observe que l'abscisse de M est au milieu de l'abscisse de A et de l'abscisse de B.
On peut faire la même remarque pour les ordonnées.
Les coordonnées du point M sont donc la moyenne des coordonnées des points A et B.

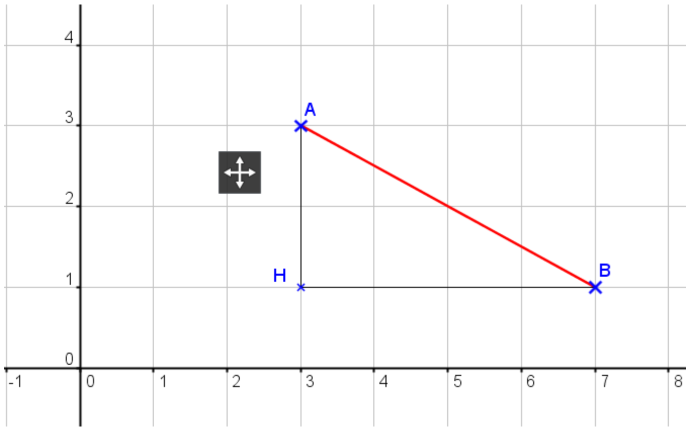
Propriété :

Dans le plan muni d'un repère (O, I, J),
si deux points A et B ont pour coordonnées respectives $(x_A ; y_A)$ **et** $(x_B ; y_B)$ **,**
alors le milieu M du segment a pour coordonnées $M\left(\frac{x_A+x_B}{2} ; \frac{y_A+y_B}{2}\right)$

Exemple :
Application à l'exemple ci dessus. Les coordonnées du milieu M du segment sont :
d 'où M à pour coordonnées $M\left(\frac{3-1}{2} ; \frac{5+1}{2}\right)$ $M(1 ; 3)$

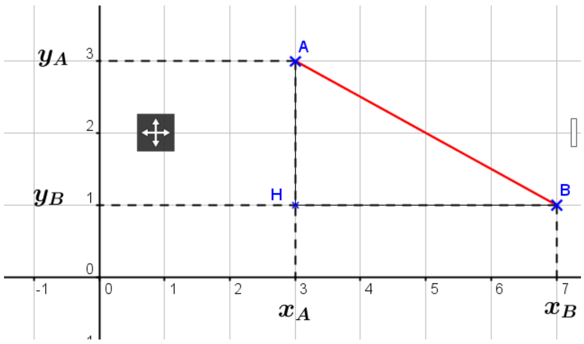
3. Calculer la distance de deux points connaissant leurs coordonnées. (vidéo 3)

Exemple :
On a A(3 ; 3) et B(7 ; 1).
L'objectif est de calculer la longueur AB.



L'idée est de placer un point H pour que AHB soit un triangle rectangle en H, comme sur la figure.
D'après le théorème de Pythagore on a alors :
$AB^2 = AH^2 + HB^2$
Or $AH = 3-1 = 2$ et $HB = 7-3 = 4$
d'où $AB^2 = 2^2 + 4^2 = 20$ et $AB = \sqrt{20}$

Propriété :



Dans le plan muni d'un repère (O, I, J),
Si deux points A et B ont pour coordonnées respectives $A(x_A ; y_A)$ et $B(x_B ; y_B)$,
alors d'après le théorème de Pythagore

on a : $AB^2 = (x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2$
$AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}$

On a A(3 ; 3) et B(7 ; 1) donc $AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2} = \sqrt{(7-3)^2 + (1-3)^2}$

$AB = \sqrt{4^2 + 2^2} = \sqrt{20}$

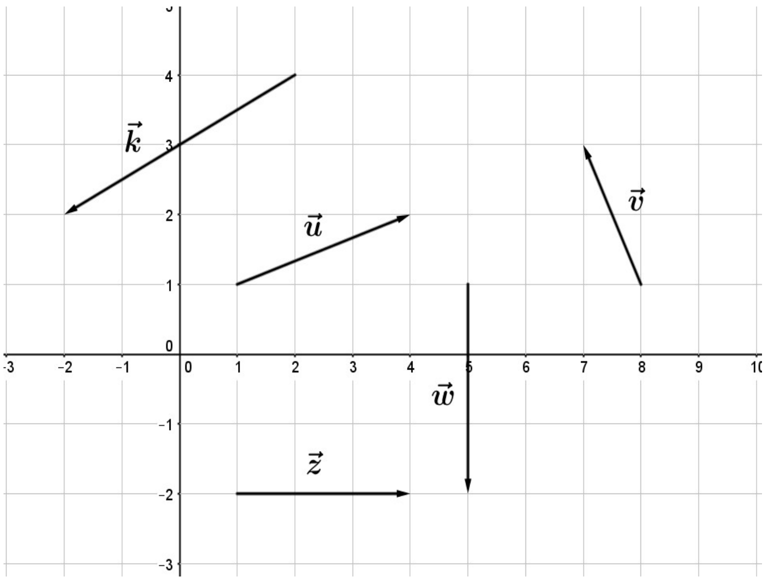
4 . Vecteurs et coordonnées dans un repère :

4.1 Lecture graphique des coordonnées d'un vecteur (vidéo 4)

Règle : On détermine les coordonnées d'un vecteur, en donnant son déplacement horizontal et vertical.

Lire les coordonnées ci-contre :

$\vec{u}(3;1)$
$\vec{v}(-1;2)$
$\vec{w}(0;-3)$
$\vec{k}(-4;-2)$
$\vec{z}(3;0)$

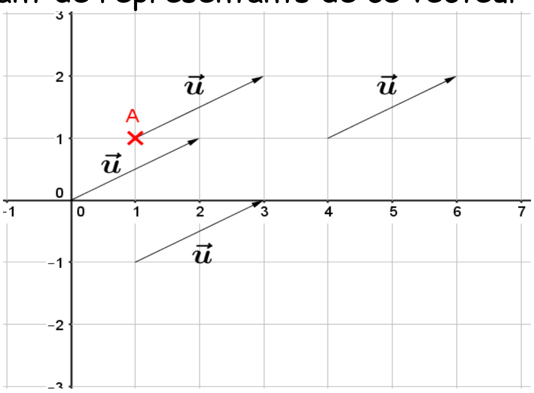


4.2 Construire un vecteur connaissant ses coordonnées :(vidéo 5)

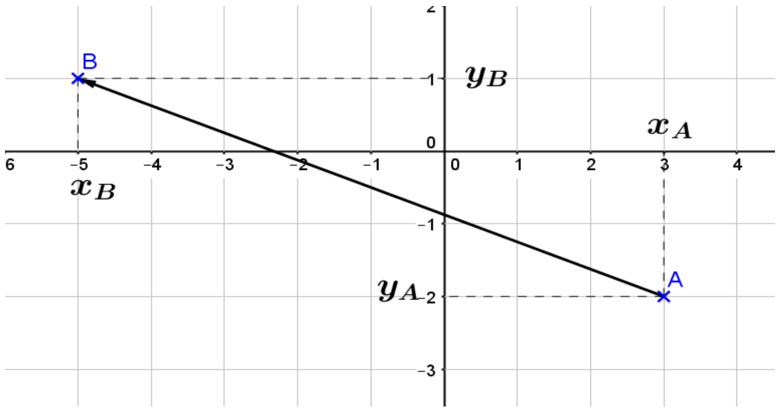
Attention,
Il ne faut pas confondre les coordonnées d'un point et celles d'un vecteur.
Elles ne représentent pas les mêmes choses :
Un vecteur mesure un déplacement. Sur un repère on peut en construire autant de représentants que l'on veut.
Un point est caractérisé par ses coordonnées, qui indiquent sa position par rapport à l'origine du repère. Un point de coordonnées définies est unique.

Illustration :

- Le point de coordonnées $A(2\,;1)$ est clairement placé dans un repère. Il n'y a pas plusieurs possibilités.
- Le vecteur $\vec{u}(2\,;1)$ peut être représenté où l'on veut. Un vecteur ne mesure qu'un déplacement, ici de deux unités horizontales vers la droite, et une verticale vers le haut. On peut tracer autant de représentants de ce vecteur dans un repère.



4.3. Calculer les coordonnées d'un vecteur(vidéo 6)



Propriété : Dans le plan muni d'un repère (O, I, J),
Si deux points A et B ont pour coordonnées respectives
$A(x_A; y_A)$ **et** $B(x_B; y_B)$ **,**
alors le vecteur $\vec{AB}$ **a pour coordonnées** $(x_B - x_A; y_B - y_A)$

Ces coordonnées correspondent au déplacement horizontal puis vertical pour aller de A à B (affectés de signes).

Dans un repère (O, I, J) du plan, on donne A(3 ; -2) et B(-5 ; 1) :

Les coordonnées du vecteur $\vec{AB}$ sont :

$$\vec{AB}\begin{pmatrix} x_B - x_A \\ y_B - y_A \end{pmatrix}$$

$$\vec{AB}\begin{pmatrix} -5-3 \\ 1-(-2) \end{pmatrix}$$

d'où : $\vec{AB}\begin{pmatrix} -8 \\ 3 \end{pmatrix}$

3.4. Vecteurs colinéaires

Théorème :

Deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires, s'il existe un nombre k tel que $\vec{u} = k \times \vec{v}$

Conséquence :

Si $\vec{u}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$ sont colinéaires alors on a les égalités : $\vec{u}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = k \times \vec{v}\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$

ou encore $\begin{cases} x = k \times x' \\ y = k \times y' \end{cases}$

Exemple 1:

Soit $\vec{u}\begin{pmatrix}4\\2\end{pmatrix}$. Déterminer les coordonnées du vecteur $\vec{v}$ tel que $\vec{u}=2\times\vec{v}$

soit $\vec{v}\begin{pmatrix}x'\\y'\end{pmatrix}$ comme $\vec{u}=2\times\vec{v}$, on a $\vec{u}\begin{pmatrix}4\\2\end{pmatrix}=2\times\vec{v}\begin{pmatrix}x'\\y'\end{pmatrix}$

$\begin{cases}4=2\times x'\\2=2\times y'\end{cases}$ donc $\begin{cases}x'=2\\y'=1\end{cases}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}$

Exemple 2:

Soit $\vec{u}\begin{pmatrix}3\\1\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}\frac{9}{2}\\\frac{3}{2}\end{pmatrix}$. $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont ils colinéaires ?

Si $\vec{u}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}x'\\y'\end{pmatrix}$ sont colinéaires alors on a les égalités : $\begin{cases}x=k\times x'\\y=k\times y'\end{cases}$

On veut donc savoir s'il existe un réel k vérifiant $\begin{cases}3=k\times\frac{9}{2}\\1=k\times\frac{3}{2}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}k=\frac{6}{9}=\frac{2}{3}\\k=\frac{2}{3}\end{cases}$

On veut donc savoir s'il existe un réel k vérifiant $\begin{cases}3=k\times\frac{9}{2}\\1=k\times\frac{3}{2}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}k=\frac{6}{9}=\frac{2}{3}\\k=\frac{2}{3}\end{cases}$

On a donc montré que $\vec{u}=\frac{2}{3}\times\vec{v}$ $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont donc colinéaires .

Propriété :

$\vec{u}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}x'\\y'\end{pmatrix}$ sont des vecteurs colinéaires équivaut à dire que leurs coordonnées sont proportionnelles.

x	x'
y	y'

est un tableau de proportionnalité.

Théorème :

$\vec{u}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}x'\\y'\end{pmatrix}$ sont des vecteurs colinéaires équivaut à dire qu' on a l'égalité $xy'-x'y=0$

Exemple 1:

Les vecteurs $\vec{u}\begin{pmatrix}-2\\3\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}4\\6\end{pmatrix}$ sont-ils des vecteurs colinéaires ?

On sait que $\vec{u}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}x'\\y'\end{pmatrix}$ sont des vecteurs colinéaires équivaut à dire qu' on a l'égalité $xy'-x'y=0$

On calcule $xy'-x'y=-2\times6-4\times3=-12-12=-24\neq0$

donc les vecteurs $\vec{u}\begin{pmatrix}-2\\3\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}4\\6\end{pmatrix}$ ne sont pas des vecteurs colinéaires

Exemple 2:

Les vecteurs $\vec{u}\begin{pmatrix}-3\\-1\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}6\\2\end{pmatrix}$ sont-ils des vecteurs colinéaires ?

On sait que $\vec{u}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}x'\\y'\end{pmatrix}$ sont des vecteurs colinéaires équivaut à dire qu' on a l'égalité $xy'-x'y=0$

On calcule $xy'-x'y=-3\times2-(-1)\times6=-6+6=0$

donc les vecteurs $\vec{u}\begin{pmatrix}-3\\-1\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}6\\2\end{pmatrix}$ sont des vecteurs colinéaires