

Dérivation

1 Taux d'accroissement d'une fonction

Soit f une fonction définie sur un intervalle D contenant les nombres a et b .

Propriété :

Soit deux points appartenant à la courbe représentative d'une fonction f tels que $A(a; f(a))$ et $B(b; f(b))$

Le coefficient directeur de la droite (AB) est donné par la relation : $\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$

Définition :

On appelle taux d'accroissement de la fonction f entre a et b est le rapport défini par :

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$

Dans le cas où A et B sont assez proches, il est plus simple de définir l'abscisse de B par le nombre $a+h$, h désignant un nombre quelconque tel que $a+h$ appartiennent à D .

Définition :

On appelle taux d'accroissement de la fonction f entre a et $a+h$ est le rapport défini par :

$$\frac{f(a+h)-f(a)}{a+h-a} = \frac{f(a+h)-f(a)}{h}$$

2. Nombre dérivé d'une fonction en un point

Quand h se rapproche de plus en plus de zéro, sans jamais l'atteindre (c'est interdit), cette quantité peut tendre vers un nombre.

Si ce nombre existe, il est le **coefficient directeur de la tangente** à la courbe au point d'abscisse a .

On le note $L = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h)-f(a)}{h}$

Exemple :

Calculer si possible le coefficient directeur en $a=2$, de la tangente à la courbe représentative de la fonction f définie sur \mathbb{R} par $f(x)=3x^2$

On calcule :

$$f(2)=3 \times 2^2=12$$

$$f(2+h)=3(2+h)^2=3(2^2+2 \times 2 \times h+h^2)=12+12h+3h^2$$

$$f(a+h)-f(a)=12+12h+3h^2-3a^2=12h+3h^2$$

$$\frac{f(a+h)-f(a)}{h} = \frac{12h+3h^2}{h} = 12+3h$$

On appelle donc $L = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h)-f(a)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} 12+3h = 12$

Définition : (vidéo 3)

Soit f une fonction définie sur un intervalle D et $a \in D$ et désignant un nombre quelconque non-nul tel que $a+h$ appartiennent à D :

On dit que f est dérivable en a lorsque $L = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$ existe.

Ce nombre limite L est appelé nombre dérivé en a de f .

On le note $f'(a)$

Dans l'exemple précédent, on a trouvé que pour $f(x) = 3x^2$, $f'(2) = 12$

3. Équation de la tangente à la courbe en un point

Propriété : (vidéo 4)

Soit f une fonction définie sur un intervalle D et un point $A(a; f(a))$ tel que $a \in D$

La courbe représentative de la fonction f admet une tangente (T) au point A d'équation :

$$y = f'(a)(x-a) + f(a)$$

Démonstration :

La fonction f est dérivable en a , sa courbe représentative admet donc une tangente (T) de coefficient directeur $f'(a)$. Son équation réduite s'écrit donc sous la forme : $y = f'(a) \times x + b$

Comme $A(a; f(a)) \in (T)$ ses coordonnées vérifient l'équation :

$$f(a) = f'(a) \times a + b$$

d'où $b = f(a) - f'(a) \times a$ et il vient : $y = f'(a) \times x + f(a) - f'(a) \times a$

au final : $y = f'(a) \times (x-a) + f(a)$

Application : (vidéo 5)

En s'aidant de la calculatrice, déterminer l'équation de la tangente en 2 de la courbe représentative de la fonction f définie sur un intervalle \mathbb{R} par $f(x) = 0,5x^3 - 3x$.

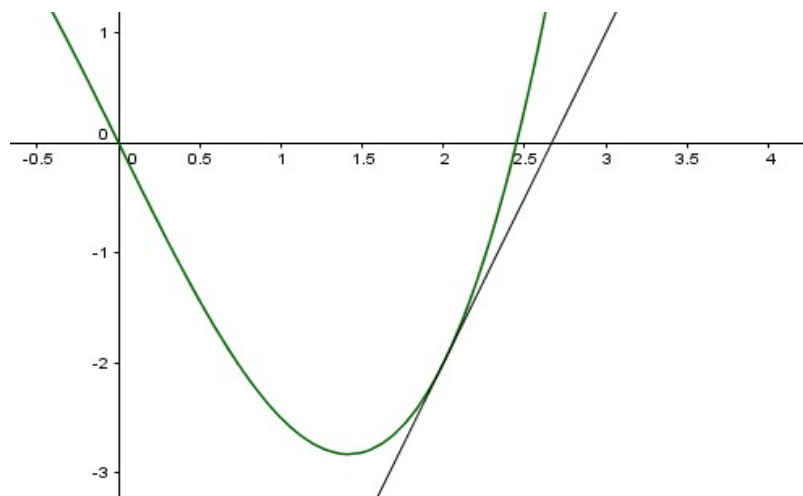
Représenter la situation à l'aide de la calculatrice ou d'un logiciel

Correction :

On calcule $f(2) = 0,5 \times 2^3 - 3 \times 2 = -2$

On trouve à la calculatrice : $f'(2) = 3$

L'équation de la tangente est donc : $y = 3(x-2) - 2$ ou encore $y = 3x - 8$



Complément : (vidéo 6)

Retrouver l'équation d'une tangente avec sa calculatrice

4. Fonction dérivée

Définition : (vidéo 7)

Soit f une fonction est dérivable sur un intervalle I (ou une réunion d'intervalles) si et seulement si elle est dérivable en tout point de l'intervalle I .

Si une fonction f est dérivable sur I , on appelle fonction dérivée de f , la fonction notée f' définie sur I qui à tout antécédent a associe $f'(a)$.

Calcul d'une dérivée :

Déterminer si la fonction f définie sur \mathbb{R} par $f(x)=3x^2$ est dérivable sur \mathbb{R} et si oui, déterminer l'expression de sa fonction dérivée.

$$f(a)=3 \times a^2$$

$$f(a+h)=3(a+h)^2=3(a^2+2 \times a \times h+h^2)=3a^2+6ah+3h^2$$

$$f(a+h)-f(a)=3a^2+6ah+3h^2-3a^2=6ah+3h^2$$

$$\frac{f(a+h)-f(a)}{h}=\frac{6ah+3h^2}{h}=6a+3h$$

Quand le nombre h tend vers 0, $\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$ tend vers $6a$

Ce nombre existe bien pour tout $a \in \mathbb{R}$, on a donc montré que f était dérivable sur \mathbb{R} et que $f'(x)=6x$

Dérivées à connaître : (vidéo 8)

- **Fonction constante :**

$$f(x)=k \text{ avec } k \in \mathbb{R} \quad D=\mathbb{R}$$

$$\text{alors } f'(x)=0 \quad I=\mathbb{R}$$

$$\text{exemple : } f(x)=3 \quad D=\mathbb{R}$$

$$\text{alors } f'(x)=0 \quad I=\mathbb{R}$$

- **Fonction affines :**

$$f(x)=ax+b \text{ avec } a \in \mathbb{R} \text{ et } b \in \mathbb{R} \quad D=\mathbb{R} \quad \text{alors } f'(x)=a \quad I=\mathbb{R}$$

$$\text{exemple : } f(x)=4x-2 \quad D=\mathbb{R}$$

$$\text{alors } f'(x)=4 \quad I=\mathbb{R}$$

- **Fonction carré :**

$$f(x)=x^2 \quad D=\mathbb{R} \quad \text{alors } f'(x)=2x \quad I=\mathbb{R}$$

- **Fonction puissance :**

$$f(x)=x^n \quad D=\mathbb{R} \quad \text{alors } f'(x)=nx^{n-1} \quad I=\mathbb{R}$$

$$\text{exemple : } f(x)=x^4 \quad D=\mathbb{R}$$

$$\text{alors } f'(x)=4x^3 \quad I=\mathbb{R}$$

- **Fonction inverse :**

$$f(x)=\frac{1}{x} \quad D=\mathbb{R} \setminus \{0\} \quad \text{alors } f'(x)=-\frac{1}{x^2} \quad I=\mathbb{R} \setminus \{0\}$$

- **Fonction racine carrée :**

$$f(x)=\sqrt{x} \quad D=\mathbb{R}_+=[0;+\infty[\quad \text{alors } f'(x)=\frac{1}{2\sqrt{x}} \quad I]0;+\infty[$$

Opérations sur les fonctions dérivées : (vidéo 9)

Soient u et v deux fonctions dérivables sur un intervalle I , et k un nombre réel.

- La fonction $u+v$ est dérivable sur I et sa dérivée est $(u+v)'=u'+v'$

- La fonction $k \times u$ est dérivable sur I et sa dérivée est $(k \times u)'=k \times u'$

Applications :

Calculer la dérivée de la fonction f définie sur \mathbb{R} par $f(x)=3x^3+4x^2-5x+7$

f est la somme de 4 fonctions de références :

$$u(x)=3x^3 \quad v(x)=4x^2 \quad w(x)=-5x \quad z(x)=7$$

On sait que $u'(x)=3 \times 3x^2=9x^2$ $v'(x)=2 \times 4x=8x$ $w'(x)=-5$ $z'(x)=0$

On a alors $f(x)=u(x)+v(x)+w(x)+z(x)$

Comme $f'(x)=u'(x)+v'(x)+w'(x)+z'(x)$, alors d'après la propriété de dérivée d'une somme

$$f'(x)=9x^2+8x-5$$

Dérivée d'un produit de fonctions : (vidéo 10)

Soient u et v deux fonctions dérivables sur un intervalle I ,

- La fonction $u \times v$ est dérivable sur I et sa dérivée est $(uv)'=u'v+u v'$
- La fonction u^2 est dérivable sur I et sa dérivée est $(u^2)'=2uu'$

Applications :

Calculer la dérivée de la fonction f définie sur \mathbb{R} par $f(x)=(x-5)(x^2+4x-3)$

f est le produit de 2 fonctions définie sur \mathbb{R} : $u(x)=x-5$ $v(x)=x^2+4x-3$

Elle est donc dérivable sur \mathbb{R} .

Comme $f(x)=u(x) \times v(x)$ alors d'après le cours : $f'(x)=u'(x) \times v(x)+u(x) \times v'(x)$

On sait que $u'(x)=1$ $v'(x)=2x+4$

$$f'(x)=1 \times (x^2+4x-3)+(x-5) \times (2x+4)$$

$$f'(x)=x^2+4x-3+2x^2+4x-10x-20$$

$$f'(x)=3x^2-2x-23$$

Dérivée d'un quotient de fonctions : ((vidéo 11)

Soient u et v deux fonctions dérivables sur un intervalle I ,

- La fonction $\frac{u}{v}$ est dérivable pour tout réel x de I vérifiant $v(x) \neq 0$ et sa dérivée est

$$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - u v'}{v^2}$$

- La fonction $\frac{1}{v}$ dérivable pour tout réel x de I vérifiant $v(x) \neq 0$ et sa dérivée est

$$\left(\frac{1}{v}\right)' = -\frac{v'}{v^2}$$

Applications :

Calculer la dérivée de la fonction f définie sur $\mathbb{R} \setminus \{3\}$ par $f(x)=\frac{2x+3}{x-3}$

f est le quotient de 2 fonctions définie sur \mathbb{R} : $u(x)=2x+3$ $v(x)=x-3$

Elle est donc dérivable pour toutes les valeurs de x qui n'annulent pas $v(x)=x-3$

f est donc dérivable sur $I=\mathbb{R} \setminus \{3\}$

$$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - u v'}{v^2}$$

On sait que $u'(x)=2$ $v'(x)=1$

$$f'(x) = \frac{2 \times (x-3) - (2x+3) \times 1}{(x-3)^2}$$

$$f'(x) = \frac{2x-6-2x-3}{(x-3)^2}$$

$$f'(x) = \frac{-9}{(x-3)^2}$$