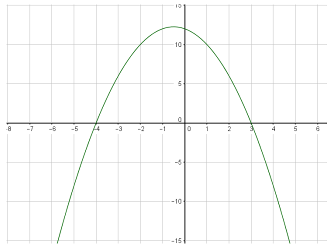
Correction Devoir surveillé de mathématiques

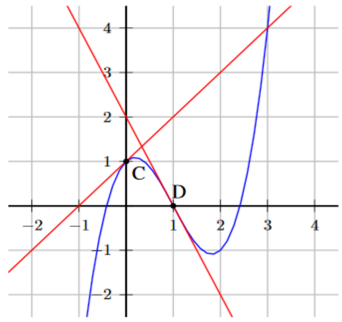
Nom **Prénom :** **Classe :**

Exercice 1 :



On a représenté ci-contre un polynôme P du second degré de la forme
$P(x)=ax^2+bx+c$
Répondre en expliquant :
1. Quel est le signe de a ?
On observe que la parabole est « tournée » vers le bas, donc $a<0$
2. Quel est le signe du discriminant du polynôme ?
On observe que la courbe coupe deux fois l'axe des abscisses. Le polynôme admet donc deux racines. Son discriminant est donc strictement positif.
3. Donner les racines éventuelles du polynôme
On lit les abscisses des points d'intersection de la courbe et de l'axe des abscisses : -4 et 3

Exercice 2 :



On a tracé C_g, la courbe représentative de la fonction g définie sur ℝ ainsi que la tangente à C_g aux points C et D d'abscisses respectives 0 et 1.
Répondre par lecture graphique aux questions suivantes :
1. $g'(0)=1$
2. Équation de la tangente à C_g au point C : $(T_0): y=x+1$
3. $g'(1)=-2$
4. Équation de la tangente à C_g au point D : $(T_0): y=-2x+2$

Exercice 3 : (voir cours)

Exercice 4 :
Donner directement, sans justification la dérivée des fonctions suivantes, définies sur [1 ; 10] :

$f'_1(x)=3$ $f'_2(x)=-\frac{1}{x^2}$ $f'_3(x)=3x^2$ $f'_4(x)=\frac{1}{2\sqrt{x}}$

Exercice 5 :
g est le produit de deux fonctions dérivables sur $]0;+\infty[$: $u(x)=2x$ et $v(x)=\sqrt{x}$ on a $g'=u'v+uv'$
comme $u'(x)=2$ et $v'(x)=\frac{1}{2\sqrt{x}}$ on a : $g'(x)=2\times\sqrt{x}+2\text{x}\times\frac{1}{2\sqrt{x}}$

Exercice 7:
1. $f'(1)=-0{,}875$ 2. $(T): y=-0{,}5x+1{,}5$

Exercice 8 :
On sait qu'une tangente au point d'abscisse $x=a$ a pour équation :
$(T): y=f'(a)(x-a)+f(a)$ ici $a=0$ donc $(T): y=f'(0)(x-0)+f(0)$
On cherche alors $f'(0)$ et $f(0)$:
$f'(0)$:
On calcule $f'(x)$: f est une fonction quotient de deux fonctions dérivables sur $]-\infty;0[$

donc $f' = \dfrac{u'v - uv'}{v^2}$ avec $u(x) = 2 - x$ $\quad v(x) = 1 - 3x$ donc $u'(x) = -1$ et $v'(x) = -3$

$$f'(x) = \frac{-1 \times (1-3x) - (2-x) \times (-3)}{(1-3x)^2} = \frac{-1+3x+6-3x}{(1-3x)^2} = \frac{5}{(1-3x)^2}$$

on a alors : $f'(0) = 5$ comme $f(0) = 2$, $(T): y = 5x + 2$

Exercice 9 :

On cherche la dérivée de f : $f'(x) = \dfrac{-3 \times x^2}{3} - 2 \times 2x + 5 = -x^2 - 4x + 5$

Pour étudier son signe, on calcule le discriminant de $-x^2 - 4x + 5$

$\Delta = b^2 - 4ac = (-4)^2 - 4 \times (-1) \times 5 = 16 + 20 = 36 > 0$

Il y a donc deux racines : $x_1 = \dfrac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \dfrac{4+6}{-2} = -5$ et $x_2 = \dfrac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \dfrac{4-6}{-2} = 1$

f' est du signe de $a = -1 < 0$ à l'extérieur des racines, ce qui donne :

A la calculatrice, on trouve $f(-5) = -\dfrac{97}{3}$ et $f(1) = \dfrac{11}{3}$

x	$-\infty$		-5		1		$+\infty$
$f'(x)$		-	**0**	+	**0**	-	
$f(x)$		$\searrow$	$-\dfrac{97}{3}$	$\nearrow$	$\dfrac{11}{3}$	$\searrow$	

Exercice 10 :

1.

Calcul pour 4000 articles :

Coût de fabrication : $C□(4) = 0{,}5 \times 4^2 + 0{,}6□\times 4 + 8{,}16 = 18{,}56$ et recette : $4 \times 8 = 32$

Bénéfice : 32-18,56=32,44

En vendant 4000 articles, l'entreprise gagne 32,44 k€ = 3244 €

Calcul pour 1200 articles :

Coût de fabrication : $C□(1{,}2) = 0{,}5 \times 1{,}2^2 + 0{,}6□\times 1{,}2 + 8{,}16 = 9{,}6$ et recette : $1{,}2 \times 8 = 9{,}6$

Bénéfice : 9,6-9,6=0

En vendant 1200 articles, l'entreprise ne gagne rien, c'est un point d'équilibre.

Il vaut mieux que l'entreprise produise 4000 pièces pour dégager un bénéfice.

2. Voir tracé. On sait que $R□$ est une fonction linéaire. Sa représentation graphique est une droite passant par l'origine. On calcule $R□(10) = 80$ ce qui donne un deuxième point de coordonnées (10;80).

3.

– L'entreprise réalise un bénéfice positif quand sa recette est supérieure à ses coûts. Graphiquement, quand la droite est « au dessus » de la courbe;

On lit les abscisses des points d'intersection de la courbe et de la droite. L'entreprise réalise un bénéfice pour $x \in [1{,}2 ; 13{,}6]$

– Le bénéfice est maximal quand la distance entre la droite et le courbe est maximum. On lit l'abscisse correspondant à cette situation : $x_0 = 7{,}4$

4. a. On calcule $B(x) = R(x) - C(x) = 8x - (0{,}5x^2 + 0{,}6x + 8{,}16) = -0{,}5x^2 + 7{,}4x - 8{,}16$

b. Pour étudier le signe de $B□(x)$, il faut calculer son discriminant :

$\Delta = b^2 - 4ac = 7{,}4^2 - 4\times(-0{,}5)\times(-8{,}16) = 38{,}44 > 0$

Il y a donc deux racines : $x_1 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-7{,}4-6{,}2}{2\times(-0{,}5)} = 13{,}6$ et $x_2 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-7{,}4+6{,}2}{2\times(-0{,}5)} = 1{,}2$

f' est du signe de $a = -0{,}5 < 0$ à l'extérieur des racines, ce qui donne :

x	0		1,2		13,6		15
$B(x)$		-	0	+	0	-	

On observe que $B(x) \geq 0 \Leftrightarrow x \in [\ 1{,}2\ ;13{,}6\ ]$

c. On peut étudier le signe de la dérivée de B ou utiliser les propriétés du second degré :

B est un polynôme du second degré sous la forme $f(x) = ax^2 + bx + c$

$a < 0$ donc la parabole est tournée vers le bas.

Elle atteint un maximum en $x_O = \frac{-b}{2a} = -\frac{7{,}4}{2\times(-0{,}5)} = 7{,}4$

B est donc croissante sur [0;7,4] puis décroissante sur [7,4;15]

A la calculatrice, on trouve $B(7{,}4) = 19{,}22$

x	0	7,4	15
$B(x)$	↗	19,22	↘

Le bénéfice maximum est de 19,22 k€ = 19220 € pour 7,4 milliers d'articles soit 7400 articles.

ANNEXE