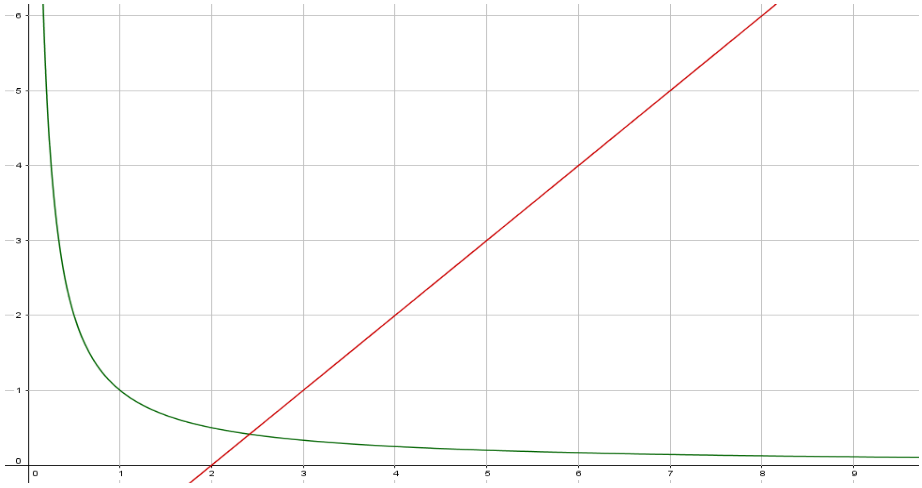
Correction exercice 4 :

1°) Représentation graphique de l'hyperbole d'équation $y=\frac{1}{x}$ et de la droite d'équation $y=x-2$ sur $\mathbb{R}_+$.



On lit graphiquement, qu'il y a une solution à l'équation (E).

On peut démontrer (non demandé) cette unicité en utilisant le sens de variation de chaque fonction représentée.

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}_+$ par $f(x)=\frac{1}{x}$

On sait d'après le cours que f est strictement décroissante sur $\mathbb{R}_+$

$f(2)=\frac{1}{2}$ et $f(3)=\frac{1}{3}$

Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}_+$ par $g(x)=x+2$

On sait d'après le cours que comme g est une fonction affine de coefficient $a=1>0$, elle est strictement croissante sur $\mathbb{R}_+$

$g(2)=0$ et $f(3)=1$

On observe que $f(2)>g(2)$ et $f(3)<g(3)$

Avec leur sens de variation opposé, il existe une unique solution à l'équation $f(x)=g(x)$. cette solution appartient à l'intervalle $[2;3]$

2°)(E) : $\frac{1}{x}=x-2$

$$\frac{1}{x}=x-2$$
$$\Leftrightarrow 1=x^2-2x$$
$$\Leftrightarrow x^2-2x-1=0$$

CQFD

2°)b

On résout $x^2-2x-1=0$ sur $\mathbb{R}_+$

On reconnaît une équation du second degré :

$$\Delta=b^2-4\times a\times c=(-2)^2-4\times 1\times(-1)=4+4=8$$

Comme $\Delta>0$, l'équation admet deux solutions :

$$x_1=\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}=\frac{2+\sqrt{8}}{2}=1+\sqrt{2}\approx 2{,}41$$
$$x_2=\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}=\frac{2-\sqrt{8}}{2}=1-\sqrt{2}\approx -0{,}41$$

Comme $x_2\notin\mathbb{R}_+$, cette équation n'admet qu'une seule solution sur l'intervalle d'étude :

$$S=\{1+\sqrt{2}\}$$