PROPORTIONS

1. Proportion et pourcentage

1.1. Proportion d'une sous-population

Définition :

La proportion p (équivalent à la notion de fréquence en statistique) d'une sous-population d'effectif n, dans une population totale, d'effectif N est le rapport des effectifs : ……………

1.2. Calculer la proportion d'une sous population

Énoncé :

Sur les 480 élèves inscrits en classe de $1^{ère}$, 108 d'entre eux ont choisi la filière STMG.
Quelle est la proportion d'élèves de STMG en 1ère ?

Méthode :

1. On construit un diagramme de Wenn :

2. On recherche les données connues dans l'énoncé :
   La population totale des élèves de $1^{ère}$, notée ……………, est égale à ……………. C'est la population de référence.
   La sous-population des élèves de STMG, notée ……………, est égale à …………….
3. On applique le cours : ………………………………………………………………
4. On conclue : La proportion d'élèves de STMG parmi tous les élèves de première, notée ……………, est : …………………………

Remarque :

Une proportion peut s'exprimer de différente manière. Dans l'exemple précédent :
Sous forme fractionnaire : …………… Sous forme décimale :…………… En pourcentage : ……………

1.3. Calculer l'effectif d'une sous-population

Énoncé :

Sachant que parmi les 480 élèves de $1^{ère}$, 15 % ont choisi la filière L, calculer le nombre d'élèves dans cette filière.

Méthode :

1. On construit un diagramme de Wenn :

2. On recherche les données connues dans l'énoncé :
   La population totale des élèves de $1^{ère}$, notée ……………, est égale à ……………. C'est la population de référence.
   On cherche la sous-population des élèves de L, notée …………….
   La proportion d'élèves de L, notée p, est égale à …………… ou ……………
3. On applique le cours :
   ……………donc ……………d'où avec un produit en croix : …………………………
4. On conclue : Il y a …………… élèves en 1ère L.

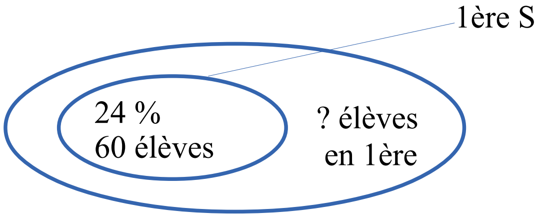
1.4. Calculer l'effectif d'une population totale

Énoncé :

Dans un lycée, 60 élèves sont en 1ère S, ce qui représente 24 % des effectifs des élèves de 1ère de l'établissement. Calculer le nombre d'élèves en première.

Méthode :

1. On construit un diagramme de Wenn :



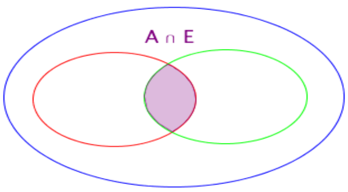
2. On recherche les données connues dans l'énoncé :
   On cherche la population totale des élèves de 1ère, notée N ,
   On connaît la sous-population des élèves de S, $n=60$.
   On connaît la proportion d'élèves de S, notée p, est égale à 24 % ou 0,24
3. On applique le cours :
   $p=\frac{n}{N}$ donc $0{,}24=\frac{60}{N}$ d'où avec un produit en croix : $N=\frac{60}{0{,}24}=250$
4. On conclue : Il y a 250 élèves au total en 1ère.

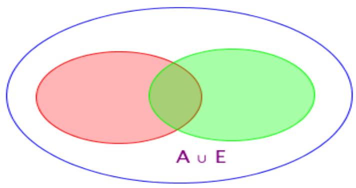
2. Union et intersection de sous-populations

2.1. Notations et vocabulaire :

On appelle l'intersection des ensembles A et E, noté $A\cap E$, l'ensemble des éléments qui appartiennent à A **et** à E.

On appelle l'union des ensembles A et E, noté $A\cup E$, l'ensemble des éléments qui appartiennent à A **ou** à E.





2.2 Égalité fondamentale :

Propriété :

Soit A et B deux sous populations d'une même population E, d'effectif n et de proportion p :

On a alors l'égalité (que l'on retrouve en probabilités) :

$p_{A\cup B}=p_A+p_B-p_{A\cap B}$ égalité avec les proportions

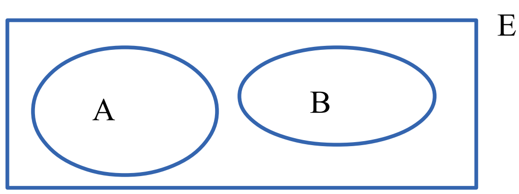
$n_{A\cup B}=n_A+n_B-n_{A\cap B}$ égalité avec les effectifs

2.3 Ensembles disjoints :

Définition :

Si $A\cap B=\emptyset$, alors on dit que les deux sous-populations A et B sont disjointes

Les sous-populations A et B n'ont aucun élément en commun.



Exemple :

On appelle A la sous-population des élèves de 1ère STMG et B la sous-population des élèves de 1ère ES. Aucun élève ne peut être en même temps dans A et dans B. Les sous-populations A et B sont disjointes.

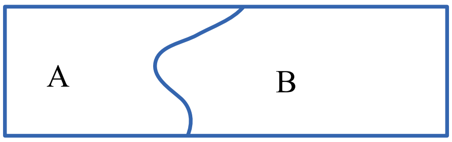
Propriété :

Si A et B sont deux sous-populations disjointes d'une population E. On a alors : $p_{A\cup B}=p_A+p_B$ et $n_{A\cup B}=n_A+n_B$

2.4 Partition d'un ensemble :

Définition :

Si $A \cap B = \emptyset$ et $A \cup B = E$ alors, on dit que les deux ensembles A et B forment une partition de E



Les sous-populations A et B n'ont aucun élément en commun.
Les sous-populations A et B couvrent la population totale.

<u>Exemple :</u>
On appelle E la population des élèves d'une classe de 1ère STMG.
On appelle A la sous-population des filles de 1ère STMG et B la la sous-population des garçons de 1ère STMG.
Aucun élève ne peut être en même temps dans A et dans B. Chaque élève est soit dans A soit dans B. A et B forment une partition de E.

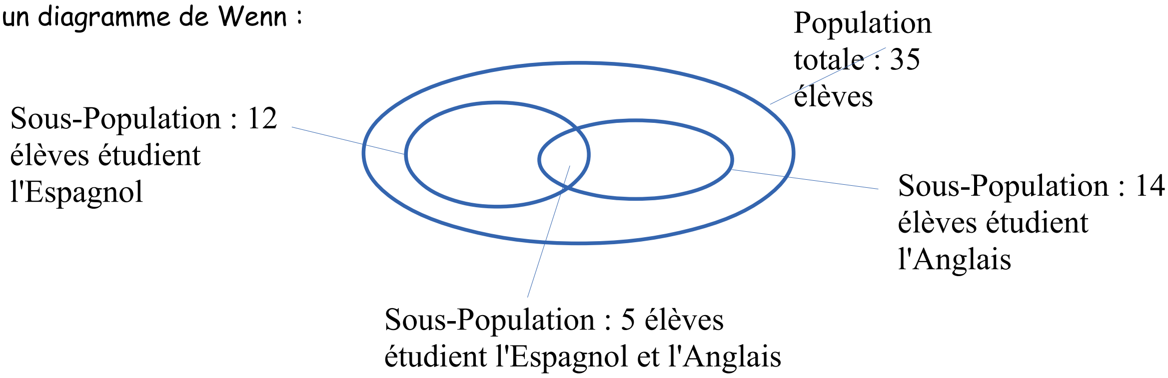
<u>Propriété :</u>
Si A et B sont deux sous-populations formant une partition d'une population E d'effectif N. On a alors :
$p_A + p_B = 1$ $\qquad n_A + n_B = N$

2.3 Application aux proportions :

<u>Exemple :</u>
Dans une classe de 35 élèves, 14 élèves étudient l'anglais, 12 élèves étudient l'espagnol et 5 élèves étudient les deux. Quelle est la proportion d'élèves apprenant l'anglais ou l'espagnol ?

<u>Méthode :</u>

1. On construit un diagramme de Wenn :

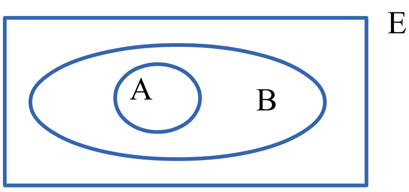


2. On recherche les données connues dans l'énoncé :
   On connaît l'effectif de la <u>population totale</u> , $N = 35$,
   On connaît l'effectif de la <u>sous-population</u> des élèves qui étudient l'anglais $n_A = 14$. donc $p_A = \frac{14}{35}$
   On connaît l'effectif de la <u>sous-population</u> des élèves qui étudient l'espagnol $n_E = 12$ donc $p_E = \frac{12}{35}$
   On connaît l'effectif de la <u>sous-population</u> des élèves qui étudient l'espagnol et l'anglais $n_{A \cap E} = 5$
   donc $p_{A \cap E} = \frac{5}{35}$
3. On applique le cours :
   $p_{A \cup E} = p_A + p_E - p_{A \cap E}$ donc $p_{A \cup E} = \frac{14}{35} + \frac{12}{35} - \frac{5}{35} = \frac{21}{35} = \frac{3}{5} = 0{,}60$
4. On conclue : 60 % des élèves de cette classe apprennent l'anglais ou l'espagnol.

3. Inclusion

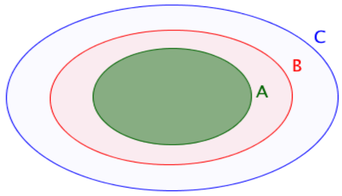
3.1. Définition :

Un ensemble A est inclus dans un ensemble B si tous les éléments de A appartiennent à B. On note $A \subset B$



3.2 Propriété :

Propriété :
A ⊂ B et B ⊂ C.
p_1 est la proportion de A dans B.
p_2 est la proportion de B dans C.
Alors $p = p_1 \times p_2$ est la proportion de A dans C.

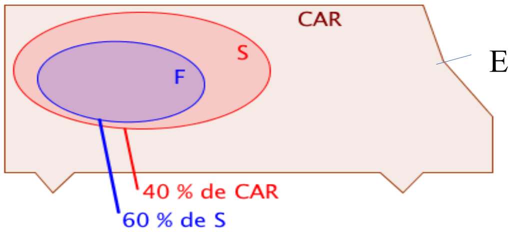


3.3 Calculer une proportion échelonnée :

Énoncé :
Dans un car, il y a 40 % de scolaires. Et parmi les scolaires, 60 % sont des filles. Quelle est la proportion de filles scolaires dans le car ?

Méthode :

1. On construit un diagramme de Wenn :



2. On recherche les données connues dans l'énoncé :
   On connaît la proportion de la sous population des scolaires dans la population totale, $p_1 = 40\%$,
   On connaît la proportion de la sous population des filles dans la sous population des scolaires , $p_2 = 60\%$
3. On applique le cours :
   $F \subset S$ et $S \subset E$, la proportion de F dans E est donnée par $p = p_1 \times p_2 = 0{,}40 \times 0{,}6 = 0{,}24$
4. On conclue : Il y a 24 % de filles scolaires dans le car.