Systèmes de deux équations à deux inconnues

1. Tester des valeurs dans un système d'équations (vidéo 1)

À connaître :

$\begin{cases} 5x + 2y = 4 \\ -2x + y = -7 \end{cases}$ est un **système** de deux équations du premier degré à deux inconnues désignées par les lettres x et y. Un couple de nombres (x, y) est solution d'un système s'il vérifie simultanément les deux égalités.

Exemple : Le couple $(2\ ;-3)$ est-il solution du système $\begin{cases} 5x + 2y = 4 \\ -2x + y = -7 \end{cases}$?

Pour x = 2 et y = – 3 :

$5x+2y=5\times2+2\times(-3)=10-6=4\quad et\quad -2x+y=-2\times2+(-3)=-7.$

Les deux égalités sont simultanément vérifiées pour $x=2$ et $y=-3$ donc le couple $(2\ ;-3)$ est solution du système $\begin{cases} 5x + 2y = 4 \\ -2x + y = -7 \end{cases}$.

« À toi de jouer » :

Les couples $(-5\ ;1{,}5)$ et $(1\ ;9{,}5)$ sont-ils solution du système $\begin{cases} 4x - 3y = -24{,}5 \\ 3x + 7y = -4{,}5 \end{cases}$?

---

2. Résoudre un système par substitution

Exemple : Résous le système $\begin{cases} -3x + y = 9 \\ 4x - 3y = -17 \end{cases}$ par substitution.

$y=9+3x$	On exprime y en fonction de x à l'aide de la première équation.
$4x-3(9+3x)=-17$	On remplace (substitue) y par $9 + 3x$ dans la deuxième équation.
$4x-27-9x=-17$ $-5x=10$ $x=-2$	On résout l'équation à une inconnue ainsi obtenue pour trouver la valeur de x.
$y=9+3\times(-2)$ $y=9-6$ $y=3$	On remplace x par – 2 dans l'équation trouvée à la première étape pour trouver la valeur de y.

Donc, si $\begin{cases} -3x + y = 9 \\ 4x - 3y = -17 \end{cases}$ alors $\begin{cases} x = -2 \\ y = 3 \end{cases}$.

On vérifie ensuite que le couple $(-2\ ;3)$ est une solution effective de ce système en appliquant la méthode 1. On en déduit que $(-2\ ;3)$ est la solution de ce système.

« À toi de jouer »

Résous par substitution le système $\begin{cases} 5x + y = 17 \\ -3x + 4y = 22 \end{cases}$.

3. Résoudre un système par combinaisons

Exemple : Résous le système $\begin{cases} 5x - 4y = 8 \\ 2x + 5y = 1 \end{cases}$ par combinaisons.

- **Détermination d'une des inconnues**

On cherche à éliminer l'inconnue y pour se ramener à une équation du premier degré à une inconnue.

$\begin{cases} 5 \times (5x - 4y) = 5 \times 8 \\ 4 \times (2x + 5y) = 4 \times 1 \end{cases}$ ⟶ On multiplie les deux membres de la première équation par 5 et ceux de la seconde par 4.

$\begin{cases} 25x - 20y = 40 \\ 8x + 20y = 4 \end{cases}$ ⟶ On obtient ainsi des coefficients opposés devant y dans les deux équations.

$25x + 8x = 40 + 4$ ⟶ On ajoute membre à membre les deux équations du système ainsi obtenu pour éliminer y

$33x = 44$

$x = \frac{44}{33} = \frac{4 \times 11}{3 \times 11} = \frac{4}{3}$ ⟶ On résout cette équation à une inconnue pour trouver la valeur de x.

- **Détermination de l'autre inconnue**

On cherche à éliminer l'inconnue x pour se ramener à une équation du premier degré à une inconnue.

$\begin{cases} 2 \times (5x - 4y) = 2 \times 8 \\ 5 \times (2x + 5y) = 5 \times 1 \end{cases}$ ⟶ On multiplie les deux membres de la première équation par 2 et ceux de la seconde par 5.

$\begin{cases} 10x - 8y = 16 \\ 10x + 25y = 5 \end{cases}$ ⟶ On obtient ainsi le même coefficient devant x dans les deux équations.

$-8y - 25y = 16 - 5$ ⟶ On soustrait membre à membre les deux équations du système ainsi obtenu pour éliminer x.

$-33y = 11$

$y = \frac{11}{-33} = -\frac{11 \times 1}{11 \times 3} = -\frac{1}{3}$ ⟶ On résout cette équation à une inconnue pour trouver la valeur de y.

Donc, si $\begin{cases} 5x - 4y = 8 \\ 2x + 5y = 1 \end{cases}$ alors $\begin{cases} x = \frac{4}{3} \\ y = -\frac{1}{3} \end{cases}$.

On vérifie ensuite que le couple $\left(\frac{4}{3} ; -\frac{1}{3}\right)$ est une solution effective de ce système en appliquant la méthode 1.

On en déduit que le couple $\left(\frac{4}{3} ; -\frac{1}{3}\right)$ est la solution de ce système.

Remarque : Pour trouver la valeur de y, on pouvait aussi remplacer x par $\frac{4}{3}$ dans l'une des deux équations du système de l'énoncé et résoudre l'équation ainsi obtenue.

« À toi de jouer »

1 Résous par combinaisons le système : $\begin{cases} 3x - 7y = 29 \\ 4x - 5y = -33 \end{cases}$.

2 Résous par la méthode de ton choix le système : $\begin{cases} -2x + 3y = 3{,}5 \\ x - 4y = -5{,}5 \end{cases}$.

4.Résoudre un problème avec deux inconnues

Exemple : Un musée propose un tarif pour les adultes à 7 € et un autre pour les enfants à 4,50 €. Lors d'une journée, ce musée a reçu la visite de 205 personnes et la recette totale a été de 1 222,50 €. Retrouve le nombre d'adultes et le nombre d'enfants ayant visité le musée lors de cette journée.

Étape n°1 : Choisir les inconnues
Soit x le nombre d'adultes et y le nombre d'enfants.

Étape n°2 : Mettre le problème en équation
On exprime les informations données dans l'énoncé en fonction de x et de y.
205 personnes ont visité le musée donc $x + y = 205$.
La recette totale a été de 1 222,50 € donc $7x + 4{,}50y = 1\,222{,}50$.
L'énoncé se traduit donc par le système ci-contre.
Ainsi $\begin{cases} x + y = 205 \\ 7x + 4{,}50y = 1\,222{,}50 \end{cases}$.

Étape n°3 : Résoudre le système
On peut résoudre le système par substitution.

$x = 205 - y$	On exprime x en fonction de y à l'aide de la première équation.
$7(205 - y) + 4{,}50y = 1\,222{,}50$	On remplace (substitue) x par $205 - y$ dans la deuxième équation.
$1\,435 - 7y + 4{,}50y = 1\,222{,}50$	
$-2{,}50y = -212{,}50$	
$y = 85$	

On remplace y par 85 dans l'équation trouvée à la première étape pour trouver la valeur de x.
On résout l'équation à une inconnue ainsi obtenue pour trouver la valeur de y.

$x = 205 - 85$
$x = 120$

Étape n°4 : Vérifier que le couple trouvé est solution du problème
On vérifie ensuite que le couple (120 ; 85) est une solution effective de ce système .
Donc, si $\begin{cases} x + y = 205 \\ 7x + 4{,}50y = 1\,222{,}50 \end{cases}$ alors $\begin{cases} x = 120 \\ y = 85 \end{cases}$.

On en déduit que le couple (120 ; 85) est la solution de ce système.
Étape n°5 : Conclure
120 adultes et 85 enfants ont visité le musée lors de cette journée.

« À toi de jouer »
Dans une boulangerie, Paul a acheté quatre croissants et trois pains au chocolat pour 5,65 €. Lina a acheté, dans cette même boulangerie, trois croissants et cinq pains au chocolat pour 6,85 €. Retrouve le prix d'un croissant et celui d'un pain au chocolat.