Plan de travail

Produit scalaire dans l'espace

8

Géométrie

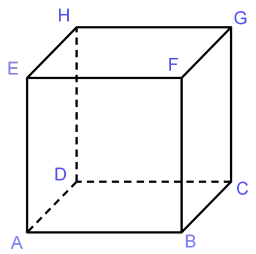
Produit scalaire

Exercice 1

On considère trois points A, B et C tels que $AB = 7$, $AC = 4$ et $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 14$.
Déterminer la mesure de l'angle $\widehat{BAC}$.

Exercice 2

On considère un cube $ABCDEFGH$ d'arêtes de longueur 1. Calculer les produits scalaires suivants



$\overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{AB}$ $\quad$ $\overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{FG}$

$\overrightarrow{EH} \cdot \overrightarrow{ED}$ $\quad$ $\overrightarrow{DH} \cdot \overrightarrow{FB}$

$\overrightarrow{CG} \cdot \overrightarrow{CE}$ $\quad$ $\overrightarrow{EG} \cdot \overrightarrow{ED}$

Exercice 3

Est-il possible d'avoir 3 points de l'espace A, B et C tels que $AB = 3$, $AC = 6$ et $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 20$?

Exercice 4

On considère trois vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ tels que $\vec{u} \cdot \vec{v} = 3$ et $\vec{u} \cdot \vec{w} = 4$. Montrer que le vecteur $\vec{u}$ est orthogonal au vecteur $4\vec{v} - 3\vec{w}$.

Exercice 5

Soit $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs orthogonaux tels que $||\vec{u}|| = 3$ et $||\vec{v}|| = 7$. Que valent $||\vec{u} + \vec{v}||$ et $||\vec{u} - \vec{v}||$?

Exercice 6

Calculer $\vec{u} \cdot \vec{v}$ dans chacun des cas suivants.

1) $||\vec{u}|| = 2$, $||\vec{v}|| = 3$, $||\vec{u} - \vec{v}|| = 4$
2) $||\vec{u}|| = 5$, $||\vec{v}|| = 2$, $||\vec{u} + \vec{v}|| = 3$
3) $||\vec{u} - \vec{v}|| = 7$, $||\vec{u} + \vec{v}|| = 12$

Base orthonormée

Exercice 7

L'espace est muni d'un repère $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ orthonormé.

Montrer que $\vec{u}\begin{pmatrix}1\\5\\-9\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}3\\3\\2\end{pmatrix}$ sont orthogonaux.

Exercice 8

L'espace est muni d'un repère $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ orthonormé. Soit x un réel. On considère les points $A(2; 5; 1)$, $B(3; 1; 2)$, $C(8; 2; x)$.

1) Déterminer les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$
2) Pour quelle valeur du réel x les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont-ils orthogonaux ?

Exercice 9

L'espace est muni d'un repère $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ orthonormé. Soit x un réel. On considère les points $A(3; 4; 2)$, $B(5; 2; 2x)$, $C(3; 10; x)$.
Pour quelles valeurs du réel x les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont-ils orthogonaux ?

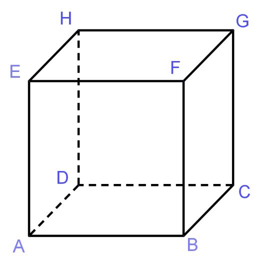
Exercice 10

L'espace est muni d'un repère $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ orthonormé. On considère les points $A(-1; 2; 0)$, $B(1; 2; 4)$, $C(-1; 1; 1)$.

1) Montrer que les points A, B et C ne sont pas alignés.
2) Calculer $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$
3) Calculer les longueurs AB et AC.
4) En déduire une mesure de l'angle $\widehat{BAC}$ arrondie au degré près.

Exercice 11

On considère un cube $ABCDEFGH$ d'arêtes de longueur 1 ainsi que les points I, J et K, centres respectifs des faces $ABCD$, $BCGF$ et $ABFE$.
On se place dans le repère orthonormé $(A; \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AE})$.



1) Donner les coordonnées des points I, J et K dans ce repère.
2) Calculer $\overrightarrow{IJ} \cdot \overrightarrow{IK}$
3) En déduire la valeur de l'angle $\widehat{JIK}$.
4) Quelle est la nature du triangle IJK ?

Exercice 12

On se place dans un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$. On considère les points $A(2; 5; 1)$, $B(3; 2; 3)$ et $C(3; 6; 2)$.

1) Calculer les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$
2) Montrer que les droites (AB) et (AC) sont perpendiculaires.

Exercice 13

On se place dans un cube $ABCDEFGH$.

1) Quelle est la nature du repère $(A; \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AE})$?
2) Déterminer les coordonnées des points F, D, B et H dans ce repère.
3) En déduire les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{DF}$ et $\overrightarrow{BH}$
4) Les droites (DF) et (BH) sont-elles perpendiculaires ?

Exercice 14

On considère les points $A(2;1;5)$ et $B(3;2;3)$ ainsi que la droite Δ admettant pour représentation paramétrique

$$\Delta : \begin{cases} x = 4 + 3t \\ y = 2 + t \\ z = -5 + 2t \end{cases}, t \in \mathbb{R}$$

Les droites (AB) et Δ sont-elles orthogonales ?

Exercice 15

L'espace est muni d'un repère $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ orthonormé. On considère les points $A(1;2;1)$, $B(3;4;1)$, $C(4;-1;6)$ et $D(6;1;6)$.
Montrer que $ABDC$ est un rectangle.

Exercice 16

On se place dans un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.
Soit $\vec{v}_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\vec{v}_2 \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}$ et $\vec{u} \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$.
On considère le plan $\mathcal{P}$ passant par O et dirigé par les vecteurs $\vec{v}_1$ et $\vec{v}_2$.
Montrer que le vecteur $\vec{u}$ est normal au plan $\mathcal{P}$.

Exercice 17

L'espace est muni d'un repère $(O; \vec{i}; \vec{j}; \vec{k})$ orthonormé. On considère les points $A(3;-2;-2)$, $B(1;3;-8)$ et $C(-2;0;4)$ ainsi que le vecteur $\vec{n} \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Montrer que $\vec{n}$ est un vecteur normal au plan (ABC).

Exercice 18

L'espace est muni d'un repère $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ orthonormé. On considère deux droites (d_1) et (d_2) admettant pour représentations paramétriques respectives

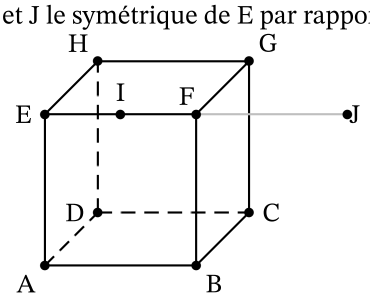
$$(d_1) : \begin{cases} x = 2 + t \\ y = 3 - t \\ z = t \end{cases}, t \in \mathbb{R} \quad \text{et}(d_2) : \begin{cases} x = -5 + 2t' \\ y = -1 + t' \\ z = 5 \end{cases}, t' \in \mathbb{R}$$

1) Donner un vecteur directeur $\vec{u}_1$ de la droite (d_1) et un vecteur directeur $\vec{u}_2$ de la droite (d_2).
2) Montrer que le vecteur $\vec{v} \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -3 \end{pmatrix}$ est orthogonal à $\vec{u}_1$ et à $\vec{u}_2$.
3) Montrer que le point $B(3;3;5)$ appartient à la droite (d_2)
4) Montrer que la droite Δ passant par le point B et dirigé par le vecteur $\vec{v}$ est perpendiculaire aux droites (d_1) et (d_2).

Annales Bac

Exercice 19

On considère le cube ABCDEFGH de côté 1, le milieu I de [EF] et J le symétrique de E par rapport à F.



Dans tout l'exercice, l'espace est rapporté au repère orthonormé $\left(A ; \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AE}\right)$.

1) a) Par lecture graphique, donner les coordonnées des points I et J.
   b) En déduire les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{DJ}$, $\overrightarrow{BI}$ et $\overrightarrow{BG}$.
   c) Montrer que $\overrightarrow{DJ}$ est un vecteur normal au plan (BGI).
   d) Montrer qu'une équation cartésienne du plan (BGI) est $2x - y + z - 2 = 0$.
2) On note d la droite passant par F et orthogonale au plan (BGI).
   a) Déterminer une représentation paramétrique de la droite d.
   b) On considère le point L de coordonnées $\left(\frac{2}{3} ; \frac{1}{6} ; \frac{5}{6}\right)$.
   Montrer que L est le point d'intersection de la droite d et du plan (BGI).

3) On rappelle que le volume V d'une pyramide est donné par la formule

$$V = \frac{1}{3} \times \mathcal{B} \times h$$

où $\mathcal{B}$ est l'aire d'une base et h la hauteur associée à cette base.

a) Calculer le volume de la pyramide FBGI.

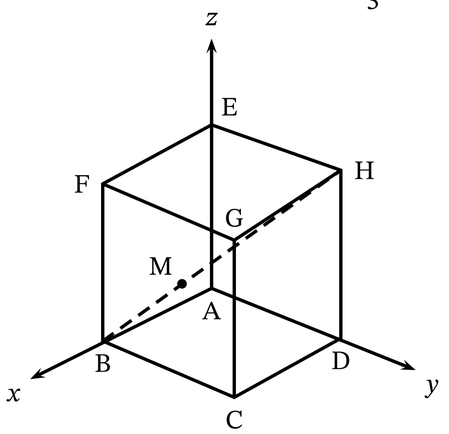
b) En déduire l'aire du triangle BGI.

Exercice 20

Dans l'espace, on considère le cube ABCDEFGH d'arête de longueur égale à 1.

On munit l'espace du repère orthonormé $\left(A\ ;\ \vec{AB}, \vec{AD}, \vec{AE}\right)$.

On considère le point M tel que $\vec{BM} = \frac{1}{3}\vec{BH}$.



1) Par lecture graphique, donner les coordonnées des points B, D, E, G et H.

2) a) Quelle est la nature du triangle EGD ? Justifier la réponse.

b) On admet que l'aire d'un triangle équilatéral de côté c est égale à $\frac{\sqrt{3}}{4}c^2$.

Montrer que l'aire du triangle EGD est égale à $\frac{\sqrt{3}}{2}$.

3) Démontrer que les coordonnées de M sont $\left(\frac{2}{3}\ ;\ \frac{1}{3}\ ;\ \frac{1}{3}\right)$.

4) a) Justifier que le vecteur $\vec{n}(-1\ ;\ 1\ ;\ 1)$ est normal au plan (EGD).

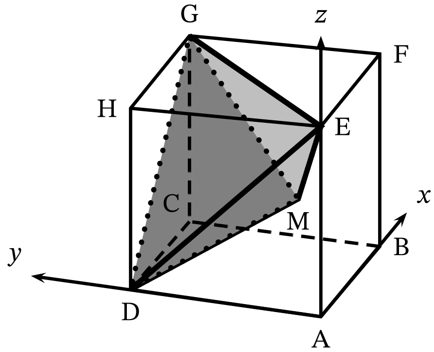
b) En déduire qu'une équation cartésienne du plan (EGD) est : $-x + y + z - 1 = 0$.

c) Soit $\mathcal{D}$ la droite orthogonale au plan (EGD) et passant par le point M.

Montrer qu'une représentation paramétrique de cette droite est :

$$\mathcal{D} : \begin{cases} x = \frac{2}{3} - t \\ y = \frac{1}{3} + t \\ z = \frac{1}{3} + t \end{cases}, \ t \in \mathbb{R}$$

5) Le cube ABCDEFGH est représenté ci-dessus selon une vue qui permet de mieux percevoir la pyramide GEDM, en gris sur la figure :



Le but de cette question est de calculer le volume de la pyramide GEDM.

a) Soit K, le pied de la hauteur de la pyramide GEDM issue du point M.

Démontrer que les coordonnées du point K sont $\left(\frac{1}{3}\ ;\ \frac{2}{3}\ ;\ \frac{2}{3}\right)$.

b) En déduire le volume de la pyramide GEDM.

On rappelle que le volume V d'une pyramide est donné par la formule

$V = \frac{b \times h}{3}$ où b désigne l'aire d'une base et h la hauteur associée.

Exercice 21

ABCDEFGH est un cube. I est le centre de la face ADHE et J est un point du segment [CG].

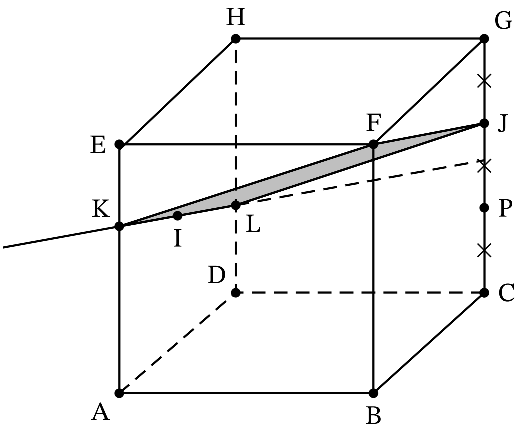
Il existe donc $a \in [0\ ;\ 1]$ tel que $\vec{CJ} = a\vec{CG}$.

On note (d) la droite passant par I et parallèle à (FJ).

On note K et L les points d'intersection de la droite (d) et des droites (AE) et (DH).

On se place dans le repère $\left(A\ ;\ \vec{AB}, \vec{AD}, \vec{AE}\right)$.

Partie A : Dans cette partie $a = \frac{2}{3}$



1) Donner les coordonnées des points F, I et J.
2) Déterminer une représentation paramétrique de la droite (d).
3) a) Montrer que le point de coordonnées $\left(0\,;\,0\,;\,\frac{2}{3}\right)$ est le point K.
   b) Déterminer les coordonnées du point L, intersection des droites (d) et (DH).
4) a) Démontrer que le quadrilatère FJLK est un parallélogramme.
   b) Démontrer que le quadrilatère FJLK est un losange.
   c) Le quadrilatère FJLK est-il un carré ?

Partie B : Cas général

On admet que les coordonnées des points K et L sont : $K\left(0\,;\,0\,;\,1-\frac{a}{2}\right)$ et $L\left(0\,;\,1\,;\,\frac{a}{2}\right)$.
On rappelle que $a \in [0\,;\,1]$.

1) Déterminer les coordonnées de J en fonction de a.
2) Montrer que le quadrilatère FJLK est un parallélogramme.
3) Existe-t-il des valeurs de a telles que le quadrilatère FJLK soit un losange ? Justifier.
4) Existe-t-il des valeurs de a telles que le quadrilatère FJLK soit un carré ? Justifier.

Exercice 22 : QCM BAC Métropole Juin 2021

L'espace est rapporté à un repère orthonormé $(O\,;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$.
On considère :

- La droite $\mathcal{D}$ passant par les points $A(1\,;\,1\,;\,-2)$ et $B(-1\,;\,3\,;\,2)$.
- La droite $\mathcal{D}'$ de représentation paramétrique :

$$\begin{cases} x = -4+3t \\ y = 6-3t \\ z = 8-6t \end{cases} \quad \text{avec } t \in \mathbb{R}.$$

- Le plan $\mathcal{P}$ d'équation cartésienne $x+my-2z+8=0$ où m est un nombre réel.

Question 1 : Parmi les points suivants, lequel appartient à la droite $\mathcal{D}'$?

a. $M_1(-1\,;\,3\,;\,-2)$ **b.** $M_2(11\,;\,-9\,;\,-22)$
c. $M_3(-7\,;\,9\,;\,2)$ **d.** $M_4(-2\,;\,3\,;\,4)$

Question 2 : Un vecteur directeur de la droite $\mathcal{D}'$est :

a. $\vec{u_1}\begin{pmatrix}-4\\6\\8\end{pmatrix}$ **b.** $\vec{u_2}\begin{pmatrix}3\\3\\6\end{pmatrix}$ **c.** $\vec{u_3}\begin{pmatrix}3\\-3\\-6\end{pmatrix}$ **d.** $\vec{u_4}\begin{pmatrix}-1\\3\\2\end{pmatrix}$

Question 3 : Les droites $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$ sont :

a. sécantes
b. strictement parallèles
c. non coplanaires
d. confondues

Question 4 : La valeur du réel m pour laquelle la droite $\mathcal{D}$ est parallèle au plan $\mathcal{P}$ est :

a. $m=-1$ **a.** $m=1$
c. $m=5$ **d.** $m=-2$

Accès Corrections

(Correction)

Corrigé de l'exercice 1

On sait que $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC} = AB\times AC\times\cos(\widehat{BAC})$. Ainsi, $\cos(\widehat{BAC}) = \dfrac{\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}}{AB\times AC} = \dfrac{14}{7\times 4} = \dfrac{1}{2}$.

Ainsi, $\widehat{BAC} = \dfrac{\pi}{3}$ (ou 60°).

Corrigé de l'exercice 2

On a ...

- $\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{AB} = AD\times AB\times\cos(\widehat{BAD}) = 1\times 1\times 0 = 0$
- $\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{FG} = AD\times FG\times\cos(0) = 1\times 1\times 1 = 1$
- $\overrightarrow{EH}\cdot\overrightarrow{ED} = EH\times ED\times\cos(\widehat{HED}) = 1\times\sqrt{2}\times\dfrac{\sqrt{2}}{2} = 1$
- $\overrightarrow{DH}\cdot\overrightarrow{FB} = DH\times FB\times\cos(180°) = 1\times 1\times(-1) = -1$
- $\overrightarrow{CG}\cdot\overrightarrow{CE} = CG\times CE\times\cos(\widehat{GCE}) = 1\times\sqrt{3}\times\dfrac{1}{\sqrt{3}} = 1$
- $\overrightarrow{EG}\cdot\overrightarrow{ED} = EG\times ED\times\cos(60°) = \sqrt{2}\times\sqrt{2}\times\sqrt{2}\times\dfrac{1}{2} = 1$

Corrigé de l'exercice 3

On aurait $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC} = AB\times AC\times\cos(\widehat{BAC})$ et donc $\cos(\widehat{BAC}) = \dfrac{\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}}{AB\times AC} = \dfrac{20}{18}$. Un cosinus étant toujours entre -1 et 1, c'est impossible.

Corrigé de l'exercice 4

On a alors $\vec{u}\cdot(4\vec{v}-3\vec{w}) = 4\vec{u}\cdot\vec{v}-3\vec{u}\cdot\vec{w} = 12-12 = 0$

Le vecteur $\vec{u}$ est orthogonal au vecteur $4\vec{v}-3\vec{w}$.

Corrigé de l'exercice 5

$\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont orthogonaux, ce qui implique que $\vec{u}\cdot\vec{v} = 0$. On a

$$||\vec{u}+\vec{v}||^2 = ||\vec{u}||^2 + 2\vec{u}\cdot\vec{v} + ||\vec{v}||^2 = 3^2 + 2\times 0 + 7^2 = 58$$

et donc $||\vec{u}+\vec{v}|| = \sqrt{58}$.

$$||\vec{u}-\vec{v}||^2 = ||\vec{u}||^2 - 2\vec{u}\cdot\vec{v} + ||\vec{v}||^2 = 3^2 - 2\times 0 + 7^2 = 58$$

et $||\vec{u}-\vec{v}|| = \sqrt{58}$.

Corrigé de l'exercice 6

On a...

1) $\vec{u}\cdot\vec{v} = -\dfrac{1}{2}(||\vec{u}-\vec{v}||^2-||\vec{u}||^2-||\vec{v}||^2) = -\dfrac{1}{2}(4^2-3^2-2^2) = \dfrac{3}{2}$

2) $\vec{u}\cdot\vec{v} = \dfrac{1}{2}(||\vec{u}+\vec{v}||^2-||\vec{u}||^2-||\vec{v}||^2) = \dfrac{1}{2}(3^2-5^2-2^2) = -10$

3) $\vec{u}\cdot\vec{v} = \dfrac{1}{4}(||\vec{u}+\vec{v}||^2-||\vec{u}-\vec{v}||^2) = \dfrac{1}{4}(12^2-7^2) = \dfrac{95}{4}$

Corrigé de l'exercice 7

On a $\vec{u}\cdot\vec{v} = 1\times 3+5\times 3-9\times 2 = 0$. $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont orthogonaux.

Corrigé de l'exercice 8

$\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}1\\-4\\1\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}6\\-3\\x-1\end{pmatrix}$. $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont orthogonaux si et seulement si $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC} = 0$, c'est-à-dire $1\times 6-4\times(-3)+1\times(x-1) = 0$ c'est-à-dire $19+x = 0$ d'où $x = -17$.

Corrigé de l'exercice 9

On a $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}2\\-2\\2x-2\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}0\\6\\x-2\end{pmatrix}$. $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont orthogonaux si et seulement si $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC} = 0$, c'est-à-dire $2\times 0-2\times 6+(2x-2)\times(x-2) = 0$

On a donc $2x^2-6x-8 = 0$. C'est un polynôme du second degré dont les racines sont -1 et 4. $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont orthogonaux si et seulement si $x = -1$ ou $x = 4$.

Corrigé de l'exercice 10

On a $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}1-(-1)\\2-2\\4-0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2\\0\\4\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}-1-(-1)\\1-2\\1-0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\-1\\1\end{pmatrix}$. Les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ ne sont pas colinéaires, les points A, B et C ne sont pas alignés.

Puisque l'on est dans un repère orthonormé, $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC} = 2\times 0+0\times -1+4\times 1 = 4$.

On a $AB = \sqrt{2^2+0^2+4^2} = \sqrt{20}$ et $BC = \sqrt{0^2+(-1)^2+1^2} = \sqrt{2}$.

On sait que $4 = \overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC} = AB\times AC\times\cos(\widehat{BAC})$.

Ainsi, $\sqrt{20}\times\sqrt{2}\times\cos(\widehat{BAC}) = 4$ d'où $\cos(\widehat{BAC}) = \dfrac{2}{\sqrt{10}}$ et l'angle $\widehat{BAC}$ mesure environ 51 degrés (utiliser arccos ou $\cos^{-1}$ sur la calculatrice).

Corrigé de l'exercice 11

[] Les points I, J et K ont pour coordonnées $\left(\dfrac{1}{2};\dfrac{1}{2};0\right)$, $\left(1;\dfrac{1}{2};\dfrac{1}{2}\right)$ et $\left(\dfrac{1}{2};0;\dfrac{1}{2}\right)$ comme coordonnées respectives dans le repère $(A;\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AD},\overrightarrow{AE})$.

On a $\overrightarrow{IJ}\begin{pmatrix}0.5\\0\\0.5\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{IK}\begin{pmatrix}0\\-0.5\\0.5\end{pmatrix}$. Puisque le repère $(A;\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AD},\overrightarrow{AE})$ est orthonormé,

$$\overrightarrow{IJ}\cdot\overrightarrow{IK} = 0.5\times 0-0\times 0.5+0.5\times 0.5 = 0.25 = \frac{1}{4}$$

On sait de plus que $\overrightarrow{IJ}\cdot\overrightarrow{IK} = IJ\times IK\times\cos(\widehat{JIK})$. Or,

- $IJ = \sqrt{0.5^2+0^2+0.5^2} = \sqrt{0.5} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$
- $IK = \sqrt{0^2+(-0.5)^2+0.5^2} = \sqrt{0.5} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$

Ainsi, $\cos(\widehat{JIK}) = \dfrac{\frac{1}{4}}{\frac{\sqrt{2}}{2}\times\frac{\sqrt{2}}{2}} = \dfrac{1}{2}$ et donc $\widehat{JIK} = \dfrac{\pi}{3}$.

Puisque $IJ = IK$, le triangle IJK est isocèle en I. On a donc $\widehat{JKI} = \widehat{IJK}$. Or, $\widehat{JIK} = \dfrac{\pi}{3}$ et la somme des angles d'un triangle vaut π radians. On a donc $\widehat{JKI} = \widehat{IJK} = \dfrac{\pi}{3}$. Le triangle IJK est donc équilatéral.

Corrigé de l'exercice 12

[] On a $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}1\\-3\\2\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$

$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=1\times1-3\times1+2\times1=0$. Les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont orthogonaux. Les droites (AB) et (AC) sont donc orthogonales. De plus, ces droites ont le point A en commun, elles sont donc perpendiculaires.

Corrigé de l'exercice 13

[] Ce repère est orthonormé.

On a $F(1,0,1)$, $D(0,1,0)$, $B(1,0,0)$, $H(0,1,1)$, $\overrightarrow{DF}\begin{pmatrix}-1\\1\\-1\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{BH}\begin{pmatrix}-1\\1\\1\end{pmatrix}$

$\overrightarrow{DF}\cdot\overrightarrow{BH}=-1\times(-1)+1\times1-1\times1=1\neq0$. Les droites (DF) et (BH) ne sont pas perpendiculaires.

Corrigé de l'exercice 14

La droite Δ est dirigée par le vecteur $\vec{u}\begin{pmatrix}3\\1\\2\end{pmatrix}$. La droite (AB) est dirigée par le vecteur $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}1\\-1\\-2\end{pmatrix}$. Par ailleurs, $\overrightarrow{AB}\cdot\vec{u}=1\times3-1\times1-2\times2=0$. Les droites (AB) et Δ sont orthogonales.

Corrigé de l'exercice 15

D'une part, on a $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}3-1\\4-2\\1-1\end{pmatrix}$ soit $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}2\\2\\0\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{CD}\begin{pmatrix}6-4\\1-(-1)\\6-6\end{pmatrix}$ soit $\overrightarrow{CD}\begin{pmatrix}2\\2\\0\end{pmatrix}$. Ainsi, $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{CD}$. Les points A, B, C et D sont donc coplanaires et $ABDC$ est un parallélogramme.

De plus, on a $\overrightarrow{BD}\begin{pmatrix}6-3\\1-4\\6-1\end{pmatrix}$ soit $\overrightarrow{BD}\begin{pmatrix}3\\-3\\5\end{pmatrix}$.

Ainsi, $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BD}=2\times3-2\times3+0\times5=0$. L'angle $\widehat{ABD}$ est un angle droit. $ABDC$ est un parallélogramme ayant un angle droit, c'est donc un rectangle.

Corrigé de l'exercice 16

Puisque le repère $(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ est orthonormé, on a donc

- $\vec{v}_1\cdot\vec{u}=1\times2+4\times(-1)+1\times2=0$
- $\vec{v}_2\cdot\vec{u}=3\times2-1\times1-2\times2=0$

Ainsi, $\vec{u}$ est orthogonal à $\vec{v}_1$ et $\vec{v}_2$ qui sont deux vecteurs non colinéaires du plan $\mathcal{P}$. $\vec{u}$ est normal au plan $\mathcal{P}$.

Corrigé de l'exercice 17

On a

- $\vec{n}\cdot\overrightarrow{AB}=2\times(1-3)+2\times(3-(-2))+1\times(-8-(-2))=0$
- $\vec{n}\cdot\overrightarrow{AC}=2\times(-2-3)+2\times(0-(-2))+1\times(4-(-2))=0$

Ainsi, $\vec{n}$ est orthogonal aux vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$. Il est donc normal au plan (ABC).

Corrigé de l'exercice 18

1) Le vecteur $\overrightarrow{u_1}\begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix}$ dirige la droite (d_1). Le vecteur $\overrightarrow{u_2}\begin{pmatrix}2\\1\\0\end{pmatrix}$ dirige la droite (d_2).

2) On considère le vecteur $\vec{v}\begin{pmatrix}1\\-2\\-3\end{pmatrix}$

   - $\vec{v}\cdot\vec{u}_1=1\times1-2\times(-1)-3\times1=0$
   - $\vec{v}\cdot\vec{u}_2=1\times2-2\times1-3\times0=0$

   $\vec{v}$ est orthogonal à $\vec{u}_1$ et à $\vec{u}_2$.

3) En prenant $t'=4$ dans l'équation de (d_2), on obtient le point de coordonnées $(3;3;5)$. Le point $B(3;3;5)$ appartient à la droite (d_2).

4) La droite Δ passant par le point B et dirigée par le vecteur $\vec{v}$ est perpendiculaire à la droite (d_2). En effet $\vec{v}$ et $\vec{u}_2$ sont orthogonaux et les deux droites ont en commun le point B. On sait de plus que (d_1) et Δ sont orthogonales. Il reste à montrer qu'elles sont sécantes.

   Une représentation paramétrique de Δ est $\begin{cases}x=3+t'\\y=3-2t'\\z=5-3t'\end{cases},t'\in\mathbb{R}$

   Chercher l'intersection de (d_1) et Δ revient à chercher deux réels t et t' tels que $\begin{pmatrix}2+t\\3-t\\t\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3+t'\\3-2t'\\5-3t'\end{pmatrix}$.

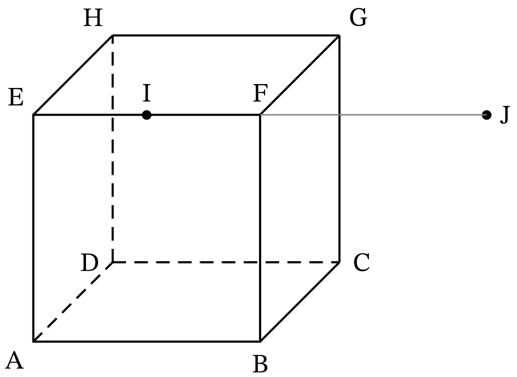
   La dernière ligne permet d'exprimer t en fonction de t'. remplaçons t par $5-3t'$ dans la première ligne. On obtient alors $2+5-3t'=3+t'$ d'où $t'=1$. Puisque $t=5-3t'$, on a alors $t=2$

   Vérifions : en remplaçant t par 2 dans l'équation de (d_1), on obtient le point de coordonnées $(4;1;;2)$. En replaçant t' par 1 dans l'équation de Δ, on obtient le point de coordonnées $(4;1;2)$. Les droites Δ et (d_1) sont donc sécantes. Puisqu'elles sont orthogonales, elles sont donc perpendiculaires.

   Ainsi, Δ est perpendiculaire à (d_1) et (d_2).

Corrigé de l'exercice 19

On considère le cube ABCDEFGH de côté 1, le milieu I de [EF] et J le symétrique de E par rapport à F.



Dans tout l'exercice, l'espace est rapporté au repère orthonormé $\left(A ; \vec{AB}, \vec{AD}, \vec{AE}\right)$.

Les sommets du cube ont pour coordonnées : A $\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$, B $\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$,

D $\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}$, E $\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$, C $\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}$, F $\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}$, H $\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}$ et G $\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$.

1) a)
- Le point I est le milieu de [EF] donc I a pour coordonnées $\begin{pmatrix}\frac{1}{2}\\0\\1\end{pmatrix}$.
- Le point J est le symétrique de E par rapport à F, donc J a pour coordonnées $\begin{pmatrix}2\\0\\1\end{pmatrix}$.

b) On en déduit les coordonnées des vecteurs $\vec{DJ}\begin{pmatrix}2\\-1\\1\end{pmatrix}$, $\vec{BI}\begin{pmatrix}-\frac{1}{2}\\0\\1\end{pmatrix}$ et $\vec{BG}\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}$.

c)
- Les vecteurs $\vec{BI}$ et $\vec{BG}$ ne sont pas colinéaires donc ce sont deux vecteurs directeurs du plan (BGI).
- $\vec{DJ}\cdot\vec{BI} = -1+0+1 = 0$ donc $\vec{DJ}\perp\vec{BI}$.
- $\vec{DJ}\cdot\vec{BG} = 0-1+1 = 0$ donc $\vec{DJ}\perp\vec{BG}$.

Donc le vecteur $\vec{DJ}$ est orthogonal à deux vecteurs non colinéaires du plan (BGI), donc il est normal au plan (BGI).

d)
- Le vecteur $\vec{DJ}\begin{pmatrix}2\\-1\\1\end{pmatrix}$ est normal au plan (BGI) donc le plan (BGI) a une équation de la forme $2x-y+z+d=0$.
- Le point B appartient au plan (BGI) donc les coordonnées de B vérifient l'équation du plan; donc $2x_B - y_B + z_B + d = 0$, ce qui équivaut à $2-0+0+d=0$, ce qui veut dire que $d=-2$.

Donc une équation cartésienne du plan (BGI) est $2x-y+z-2=0$.

2) On note d la droite passant par F et orthogonale au plan (BGI).

a) La droite d est orthogonale au plan (BGI), et $\vec{DJ}$ est un vecteur normal au plan (BGI), donc $\vec{DJ}$ est un vecteur directeur de la droite d.

Le point F appartient à la droite d donc la droite d est l'ensemble des points M de coordonnées $(x\ ;\ y\ ;\ z)$ tels que $\vec{FM}$ et $\vec{DJ}$ soient colinéaires.

$\vec{FM}$ et $\vec{DJ}$ colinéaires $\iff$ $\vec{FM} = t.\vec{DJ}$ $\iff$ $\begin{cases} x-1 = t\times 2\\ y-0 = t\times(-1)\\ z-1 = t\times 1\end{cases}$

Donc la droite d a pour équation $\begin{cases} x = 1+2t\\ y = \quad -t\\ z = 1+\ t\end{cases}$, $t\in\mathbb{R}$

b) On considère le point L de coordonnées $\left(\frac{2}{3}\ ;\ \frac{1}{6}\ ;\ \frac{5}{6}\right)$.
- Pour prouver que $L\in d$, on cherche t pour que $\begin{cases}\frac{2}{3} = 1+2t\\ \frac{1}{6} = \quad -t\\ \frac{5}{6} = 1+\ t\end{cases}$

  On trouve $t = -\dfrac{1}{6}$ donc $L\in d$.
- Le plan (BGI) a pour équation $2x-y+z-2=0$; or $2x_L - y_L + z_L - 2 = \dfrac{4}{3} - \dfrac{1}{6} + \dfrac{5}{6} - 2 = 0$, donc $L\in$ (BGI).

Le point L est donc le point d'intersection de la droite d et du plan (BGI).

3) a) La pyramide FBGI a pour base le triangle rectangle FBG, et pour hauteur IF.
- $IF = \dfrac{1}{2}$
- Le triangle rectangle FBG a pour aire $\dfrac{FG\times FB}{2} = \dfrac{1}{2}$.

Le volume de la pyramide FBGI est donc $\mathcal{V} = \dfrac{1}{3}\times\dfrac{1}{2}\times\dfrac{1}{2} = \dfrac{1}{12}$.

b) La droite d est orthogonale au plan (BGI) et coupe ce plan en L. Le point F appartient à la droite d, donc on peut dire que la distance FL est la distance du point F au plan (BGI), autrement dit c'est la hauteur de la pyramide FBGI dont le triangle BGI est la base.

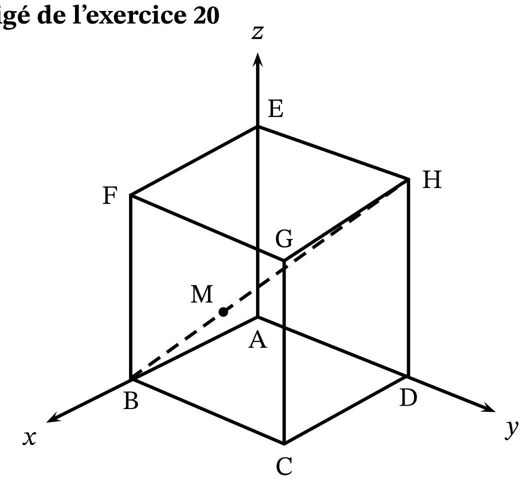
$FL^2 = \left(\dfrac{2}{3}-1\right)^2 + \left(\dfrac{1}{6}-0\right)^2 + \left(\dfrac{5}{6}-1\right)^2 = \dfrac{1}{9} + \dfrac{1}{36} + \dfrac{1}{36} = \dfrac{6}{36} = \dfrac{1}{6}$ donc $FL = \dfrac{1}{\sqrt{6}}$

On appelle $\mathcal{A}$ l'aire du triangle BGI. On exprime le volume de la pyramide FBGI :

$\mathcal{V} = \dfrac{1}{3}\times FL\times\mathcal{A} \iff \dfrac{1}{12} = \dfrac{1}{3}\times\dfrac{1}{\sqrt{6}}\times\mathcal{A} \iff \dfrac{3\times\sqrt{6}}{12} = \mathcal{A} \iff \mathcal{A} = \dfrac{\sqrt{6}}{4}$

L'aire du triangle BGI est égale à $\dfrac{\sqrt{6}}{4}$.

Corrigé de l'exercice 20



1) Dans le repère $\left(\text{A} ; \vec{AB}, \vec{AD}, \vec{AE}\right)$, on a B(1 ; 0 ; 0), D(0 ; 1 ; 0), E(0 ; 0 ; 1), G(1 ; 1 ; 1), H(0 ; 1 ; 1).

2) a) [EG], [GD] et [ED] sont les hypoténuses de triangles rectangles isocèles de côté 1, donc EG = GD = ED $= \sqrt{2}$: le triangle EGD est équilatéral.

b) Puisque $c = \sqrt{2}$, on a $\mathcal{A}(\text{EGD}) = \dfrac{\sqrt{3}}{4} \times \left(\sqrt{2}\right)^2 = \dfrac{\sqrt{3}}{4} \times 2 = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

3) On a $\vec{BH}\begin{pmatrix}-1\\1\\1\end{pmatrix}$, donc $\vec{BM} = \dfrac{1}{3}\vec{BH}\begin{pmatrix}-\frac{1}{3}\\\frac{1}{3}\\\frac{1}{3}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}x_{\text{M}}-1\\y_{\text{M}}-0\\z_{\text{M}}-0\end{pmatrix}$.

On a donc : $x_{\text{M}} = 1 - \dfrac{1}{3} = \dfrac{2}{3}$; $y_{\text{M}} = \dfrac{1}{3}$; $z_{\text{M}} = \dfrac{1}{3}$.

Conclusion : M a pour coordonnées $\left(\dfrac{2}{3} ; \dfrac{1}{3} ; \dfrac{1}{3}\right)$.

4) a) On a $\vec{EG}\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}$: donc $\vec{n} \cdot \vec{\text{EG}} = -1 + 1 + 0 = 0$:

$\vec{\text{ED}}\begin{pmatrix}0\\1\\-1\end{pmatrix}$: donc $\vec{n} \cdot \vec{\text{ED}} = 0 + 1 - 1 = 0$.

Conclusion : $\vec{n}$ est orthogonal à deux vecteurs non colinéaires du plan (EGD) : c'est un vecteur normal à ce plan.

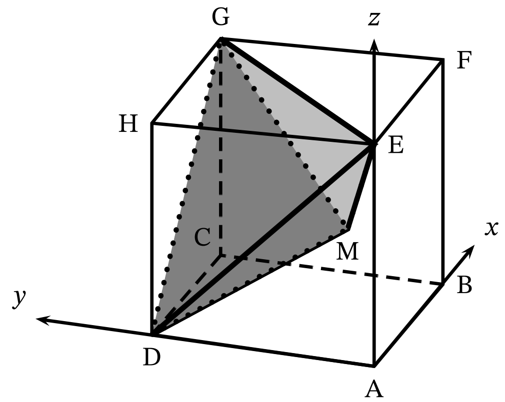
b) On sait qu'un plan d'équation $ax + by + cz + d = 0$ a un vecteur normal de coordonnées $(a ; b ; c)$, donc :
$P(x ; y ; z) \in (\text{EGD}) \iff -x + y + z + d = 0$.
Comme E(0; 0; 1)$\in$ (EGD) $\iff 0 + 0 + 1 + d = 0 \iff d = -1$.
Finalement : le plan (EGD) a pour équation $-x + y + z - 1 = 0$.

c) La droite $\mathcal{D}$ contient M et a pour vecteur directeur $\vec{n}$ vecteur normal au plan (EGD), donc avec $\vec{MP}\begin{pmatrix}x-\frac{2}{3}\\y-\frac{2}{3}\\z-\frac{1}{3}\end{pmatrix}$:

$P(x ; y ; z) \in \mathcal{D} \iff \vec{MP} = t\vec{n}$, avec $t \in \mathbb{R}$, soit :

$$\begin{cases} x - \frac{2}{3} &= -t \\ y - \frac{1}{3} &= t \\ z - \frac{1}{3} &= t \end{cases}, t \in \mathbb{R} \iff \begin{cases} x &= \frac{2}{3} - t \\ y &= \frac{1}{3} + t \\ z &= \frac{1}{3} + t \end{cases}, t \in \mathbb{R}.$$

5) Le cube ABCDEFGH est représenté ci-dessus selon une vue qui permet de mieux percevoir la pyramide GEDM, en gris sur la figure :



a) On a vu que la droite $\mathcal{D}$ contient M et est perpendiculaire au plan (EBD) : c'est donc la hauteur de la pyramide GEDM issue de M. Le pied de cette hauteur K appartient donc à $\mathcal{D}$ et au plan (EGD); ses coordonnées vérifient donc les équations :

$$\begin{cases} x &= \frac{2}{3} - t \\ y &= \frac{1}{3} + t \\ z &= \frac{1}{3} + t \\ -x + y + z - 1 &= 0 \end{cases} \Rightarrow -\left(\tfrac{2}{3} - t\right) + \tfrac{1}{3} + t + \tfrac{1}{3} + t - 1 = 0 \iff 3t = 1 \iff t = \tfrac{1}{3}.$$

En remplaçant t par $\frac{1}{3}$ dans l'équation paramétrique de $\mathcal{D}$, on obtient :

$$\begin{cases} x = \frac{2}{3} - \frac{1}{3} = \frac{1}{3} \\ y = \frac{1}{3} + \frac{1}{3} = \frac{2}{3} \\ z = \frac{1}{3} + \frac{1}{3} = \frac{2}{3} \end{cases}$$

Conclusion : K a pour coordonnées $\left(\dfrac{1}{3} ; \dfrac{2}{3} ; \dfrac{2}{3}\right)$.

b) On en déduit $\vec{KM}\begin{pmatrix}\frac{1}{3}\\-\frac{1}{3}\\-\frac{1}{3}\end{pmatrix}$.

D'où $\text{KM}^2 = \dfrac{1}{9} + \dfrac{1}{9} + \dfrac{1}{9} = \dfrac{3}{9}$; on en déduit KM$= \dfrac{\sqrt{3}}{3}$.

Comme $\mathcal{A}(\text{EGD}) = \frac{\sqrt{3}}{2}$, le volume de la pyramide GEDM est : $\dfrac{\frac{\sqrt{3}}{2} \times \frac{\sqrt{3}}{3}}{3} = \dfrac{1}{6}$.

Corrigé de l'exercice 21

ABCDEFGH est un cube. I est le centre de la face ADHE et J est un point du segment [CG].

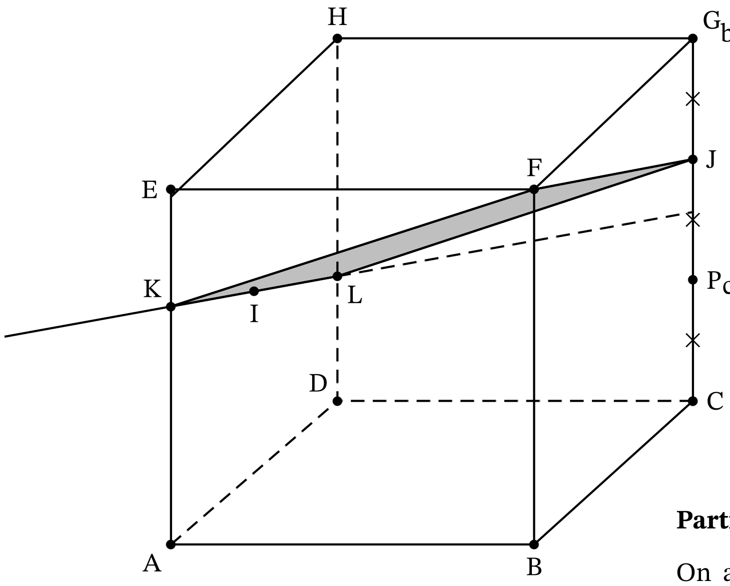
Il existe donc $a \in [0\,;\,1]$ tel que $\vec{CJ} = a\vec{CG}$.

On note (d) la droite passant par I et parallèle à (FJ).

On note K et L les points d'intersection de la droite (d) et des droites (AE) et (DH).

On se place dans le repère $\left(A\,;\,\vec{AB},\,\vec{AD},\,\vec{AE}\right)$.

Partie A : Dans cette partie $a = \dfrac{2}{3}$



1) Dans le repère $\left(A\,;\,\vec{AB},\,\vec{AD},\,\vec{AE}\right)$, $F(1\,;0\,;1)$, I milieu de [AH] et de de [DE], donc $I\left(0\,;\,\frac{1}{2}\,;\,\frac{1}{2}\right)$ et $J\left(1\,;\,1\,;\,\frac{2}{3}\right)$

2) On a $M(x\,;\,y\,;\,z) \in (d) \iff$ il existe $t \in \mathbb{R}$, tel que $\vec{IM} = t\vec{FJ}$.

Avec $\vec{IM}\begin{pmatrix} x-0 \\ y-\frac{1}{2} \\ z-\frac{1}{2}\end{pmatrix}$ et $\vec{FJ}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -\frac{1}{3}\end{pmatrix}$, on a donc

$$M(x\,;\,y\,;\,z) \in (d) \iff \left\{\begin{array}{lcl} x & = & t\times 0 \\ y-\frac{1}{2} & = & t\times 1 \\ z-\frac{1}{2} & = & t\times\left(-\frac{1}{3}\right)\end{array}\right. \iff$$

$$\left\{\begin{array}{lcl} x & = & 0 \\ y & = & \frac{1}{2}+t \\ z & = & \frac{1}{2}-\frac{t}{3}\end{array}\right. \quad t \in \mathbb{R}.$$

3) a) Le point K est le point de (d) d'ordonnée nulle, soit $t+\frac{1}{2} = 0 \iff t = -\frac{1}{2}$. Sa cote est donc $z = \frac{1}{2} - \frac{-\frac{1}{2}}{3} = -\frac{1}{2}+\frac{1}{6} = \frac{3}{6}+\frac{1}{6} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$.

Donc $K\left(0\,;\,0\,;\,\dfrac{2}{3}\right)$.

b) Tous les points de (DH) ont une ordonnée égale à 1.

Or un point de (d) a une ordonnée égale à $\frac{1}{2}+t = 1 \iff t = \frac{1}{2}$.

Enfin L a une cote égale à $z = \frac{1}{2}-\frac{t}{3} = \frac{1}{2}-\frac{1}{6} = \frac{3}{6}-\frac{1}{6} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$.

$L\left(0\,;\,1\,;\,\frac{1}{3}\right)$.

4) a) Le milieu de [FL] a pour coordonnées $\left(\dfrac{1+0}{2}\,;\,\dfrac{0+1}{2}\,;\,\dfrac{1+\frac{1}{3}}{2}\right)$, soit $\left(\dfrac{1}{2}\,;\,\dfrac{1}{2}\,;\,\dfrac{2}{3}\right)$.

Le milieu de [JK] a pour coordonnées $\left(\dfrac{0+1}{2}\,;\,\dfrac{1+0}{2}\,;\,\dfrac{\frac{2}{3}+\frac{2}{3}}{2}\right)$, soit $\left(\dfrac{1}{2}\,;\,\dfrac{1}{2}\,;\,\dfrac{2}{3}\right)$.

Conclusion : les diagonales de FJLK ont le même milieu : FJLK est un parallélogramme.

b) On a $\vec{FL}\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -\frac{2}{3}\end{pmatrix}$ et $\vec{JK}\begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 0\end{pmatrix}$.

Donc $\vec{FL}\cdot\vec{JK} = 1-1+0 = 0$: les vecteurs sont orthogonaux, les diagonales du parallélogramme sont perpendiculaires, don FJLK est un losange.

c) On a $\vec{KF}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \frac{1}{3}\end{pmatrix}$ et $\vec{FJ}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -\frac{1}{3}\end{pmatrix}$, donc $\vec{KF}\cdot\vec{FJ} = 0+0-\dfrac{1}{9} \neq 0$: les vecteurs ne sont pas orthogonaux, donc les côtés consécutifs [KF] et [FJ] ne sont pas perpendiculaires, donc FJLK n'est pas un rectangle, donc pas un carré.

Partie B : Cas général

On admet que les coordonnées des points K et L sont : $K\left(0\,;\,0\,;\,1-\dfrac{a}{2}\right)$ et $L\left(0\,;\,1\,;\,\dfrac{a}{2}\right)$.

On rappelle que $a \in [0\,;\,1]$.

1) On sait que J est défini par $\vec{CJ} = a\vec{CG}$.

On a avec $G(1\,;1\,;1)$, $\vec{CG}\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1\end{pmatrix}$; donc $a\vec{CG}\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ a\end{pmatrix}$, donc $\vec{CJ}\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ a\end{pmatrix}$

et comme C a pour coordonnées $(1\,;1\,;0)$, on en déduit que J a pour coordonnées $(1\,;\,1\,;\,a)$.

2) On a $\vec{FJ}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ a-1\end{pmatrix}$ et $\vec{KL}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ a-1\end{pmatrix}$.

Donc $\vec{FJ} = \vec{KL} \iff$ FJLK est un parallélogramme.

3) On a $\vec{FL}\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ \frac{a}{2}-1\end{pmatrix}$ et $\vec{JK}\begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1-\frac{3a}{2}\end{pmatrix}$.

Donc $\vec{FL}\cdot\vec{JK} = 1-1+\left(\dfrac{a}{2}-1\right)\left(1-\dfrac{3a}{2}\right) = \left(\dfrac{a}{2}-1\right)\left(1-\dfrac{3a}{2}\right)$.

$$\text{On a } \vec{FL}\cdot\vec{JK} = 0 \iff \left\{\begin{array}{lcl} \frac{a}{2}-1 & = & 0 \\ & \text{ou} & \\ 1-\frac{3a}{2} & = & 0\end{array}\right. \iff$$

$$\left\{\begin{array}{lcl} \frac{a}{2} & = & 1 \\ & \text{ou} & \\ 1 & = & \frac{3a}{2}\end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{lcl} a & = & 2 \\ & \text{ou} & \\ \frac{2}{3} & = & a\end{array}\right.$$

La seule solution de l'intervalle $[0;1]$ est $\frac{2}{3}$, la valeur particulière de la partie A.

Dans ce cas le produit scalaires étant nul, les vecteurs sont orthogonaux, donc les droites sont particulières : les diagonales du parallélogramme étant perpendiculaires, le quadrilatère FJLK est un losange.

4) On a vu dans la question précédente que seule la valeur $\frac{2}{3}$ de a donnait un losange FJLK et dans la question **4. c.** on a vu qu'alors le losange n'était pas un carré.

Corrigé de l'exercice 22

Question 1 : On voit que pour $t = 5$, les coordonnées du point de la droite $\mathcal{D}'$ sont $(11\ ;\ -9\ ;\ -22)$ soit les coordonnées de M_2.

Réponse b.

Question 2 : Un vecteur directeur de la droite $\mathcal{D}'$ est : $\vec{u}_3\begin{pmatrix}3\\-3\\-6\end{pmatrix}$.

Réponse c.

Question 3 :

Un vecteur directeur de la droite $\mathcal{D}$ est $\vec{\mathrm{AB}}\begin{pmatrix}-2\\2\\4\end{pmatrix}$ colinéaire au vecteur $\frac{1}{2}\vec{\mathrm{AB}}\begin{pmatrix}-1\\1\\2\end{pmatrix}$

Un vecteur directeur de la droite $\mathcal{D}'$ est $\vec{u}_3\begin{pmatrix}3\\-3\\-6\end{pmatrix}$ colinéaire au vecteur $\frac{1}{3}\vec{u}_3\begin{pmatrix}1\\-1\\-2\end{pmatrix}$ ou encore colinéaire au vecteur $-\frac{1}{3}\vec{u}_3\begin{pmatrix}-1\\+1\\2\end{pmatrix}$.

Les droites $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$ ayant des vecteurs directeurs colinéaires au même vecteur sont donc parallèles.

De plus en remplaçant t par $\frac{5}{3}$ dans l'équation paramétrique de $\mathcal{D}'$ on obtient $x = 1,\ \ y = 1$ et $z = -2$.

Les droites sont parallèles et ont un point commun : elles sont donc confondues.

Réponse d.

Question 4 : $\mathcal{P}$ a pour vecteur normal $\vec{p}\begin{pmatrix}1\\m\\-2\end{pmatrix}$.

$\mathcal{D}$ est parallèle au plan $\mathcal{P}$ si $\vec{\mathrm{AB}}$ et $\vec{p}$ sont orthogonaux, soit : $\vec{\mathrm{AB}}\cdot\vec{p} = 0 \iff -2\times 1 + 2\times m + 4\times(-2) = 0 \iff -2 + 2m - 8 = 0 \iff 2m = 10 \iff m = 5$.

Réponse c.