Cours & méthodes

Produit scalaire dans l'espace

8

GEOMETRIE

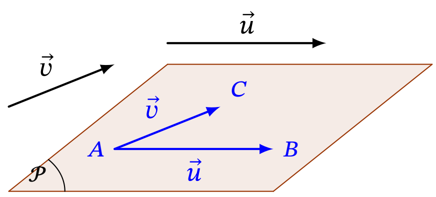
1 Produit scalaire dans l'espace

Cours de 1ère spé

1.1 Extension du produit scalaire à l'espace

Définition 1

Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs de l'espace.
On considère les points A, B et C tels que $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$ et $\vec{v} = \overrightarrow{AC}$.
Il existe alors au moins un plan $\mathcal{P}$ contenant les points A, B et C.
Le **produit scalaire** des vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$, noté $\vec{u} \cdot \vec{v}$, est le produit scalaire $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$ calculé dans le plan $\mathcal{P}$.



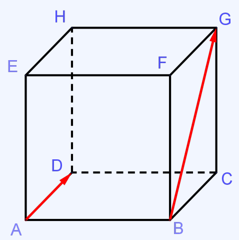
Définition 2 : Avec l'angle et les normes

Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs non nuls de l'espace, A, B et C trois points de l'espace tels que $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$ et $\vec{v} = \overrightarrow{AC}$.

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = ||\vec{u}|| \times ||\vec{v}|| \times \cos(\vec{u}\,;\vec{v}) \quad \text{et} \quad \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = AB \times AC \times \cos \widehat{BAC}$$

Exemple 1 : Avec le produit des normes

Dans un cube $ABCDEFGH$ de côté 1, calculer le produit scalaire $\overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{BG}$.

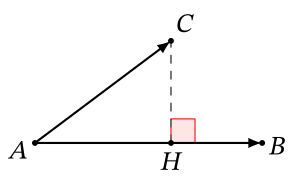


D'une part, $\overrightarrow{BG} = \overrightarrow{AH}$. Ainsi, $\overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{BG} = \overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{AH}$
L'angle $\widehat{HAD}$ mesure 45° ou $\dfrac{\pi}{4}$ radians.
$AD = 1$. Le théorème de Pythagore permet de montrer que $AH = \sqrt{2}$
Ainsi, $\overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{AH} = AD \times AH \times \cos\left(\dfrac{\pi}{4}\right) = 1 \times \sqrt{2} \times \dfrac{\sqrt{2}}{2} = 1$

Définition 3 : Avec le projeté orthogonal

Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs non nuls de l'espace, A, B et C trois points de l'espace tels que $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$ et $\vec{v} = \overrightarrow{AC}$. On note H le projeté orthogonal de C sur la droite (AB). Alors

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AH}$$



Remarque 1

Ce dernier produit scalaire est facile à calculer car l'angle $\widehat{BAH}$ est nul ou plat :

- Si $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AH}$ sont de même sens, alors $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AH} = AB \times AH$.
- Si $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AH}$ sont de sens contraires, alors $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AH} = -AB \times AH$.

Exemple 2 : Avec le projeté

Dans le même cube $ABCDEFGH$ de côté 1 que l'exemple précédent, calculer le produit scalaire $\overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{BG}$.
D'une part, $\overrightarrow{BG} = \overrightarrow{AH}$. Ainsi, $\overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{BG} = \overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{AH}$
D est le projeté orthogonal de H sur (AD), donc $\overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{BG} = \overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{AD} = AD \times AD = 1$

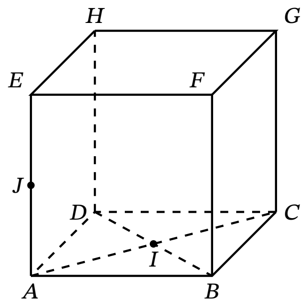
Définition 4 : Carré scalaire

On appelle **carré scalaire** d'un vecteur $\vec{u}$, et on note $\vec{u}^2$, le réel $\vec{u} \cdot \vec{u}$.
En particulier, $\vec{u}^2 = ||\vec{u}|| \times ||\vec{u}|| \times \cos 0 = ||\vec{u}||^2$ et donc $\overrightarrow{AB}^2 = AB^2$.

Méthode 1 : Utiliser les définitions du produit scalaire

$ABCDEFGH$ est un cube d'arête 1. J est le milieu de l'arête $[AE]$ et I est le centre de la face $ABCD$.
Calculer les produits scalaires suivants :

a) $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$ b) $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{EH}$ c) $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{DG}$



Correction

1.2 Propriétés algébriques du produit scalaire

Propriété 1

Pour tous vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ de l'espace et pour tout réel λ, on a :

1) $\vec{u} \cdot \vec{v} = \vec{v} \cdot \vec{u}$;
2) $\vec{u} \cdot (\lambda\vec{v}) = (\lambda\vec{u}) \cdot \vec{v} = \lambda(\vec{u} \cdot \vec{v})$;
3) $\vec{u} \cdot (\vec{v} + \vec{w}) = \vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{u} \cdot \vec{w}$;
4) $(\vec{u} + \vec{v})^2 = \vec{u}^2 + 2\vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{v}^2$;
5) $(\vec{u} - \vec{v})^2 = \vec{u}^2 - 2\vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{v}^2$;
6) $(\vec{u} + \vec{v}) \cdot (\vec{u} - \vec{v}) = \vec{u}^2 - \vec{v}^2$.

Démonstration

Méthode 2 : Utiliser les propriétés du produit scalaire

On reprend le cube $ABCDEFGH$ d'arête 1 de la méthode 1.
Calculer a) $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{HI}$ b) $\overrightarrow{JC} \cdot \overrightarrow{AB}$

Correction

Propriété 2 : Formules de polarisation

Pour tous vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ de l'espace

- $\vec{u} \cdot \vec{v} = \dfrac{1}{2}\left(||\vec{u}||^2 + ||\vec{v}||^2 - ||\vec{u} - \vec{v}||^2\right)$
- $\vec{u} \cdot \vec{v} = \dfrac{1}{2}\left(||\vec{u} + \vec{v}||^2 - ||\vec{u}||^2 - ||\vec{v}||^2\right)$
- $\vec{u} \cdot \vec{v} = \dfrac{1}{4}(||\vec{u} + \vec{v}||^2 - ||\vec{u} - \vec{v}||^2)$

Démonstration

Remarque 2

En particulier, pour tous points A, B et C de l'espace, on a :

$$\boxed{\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = \frac{1}{2}\left(AB^2 + AC^2 - BC^2\right)}$$

Méthode 3 : Utiliser les formules de polarisation du produit scolaire

On reprend le cube $ABCDEFGH$ d'arête 1.

a) Calculer $\overrightarrow{JB} \cdot \overrightarrow{JH}$.

b) En déduire la mesure en degré de l'angle $\widehat{BJH}$. Arrondir au dixième.

Correction

1.3 Caractérisation de l'orthogonalité

Définition 5

Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs de l'espace *non nuls* et soient A, B et C trois points tels que $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$ et $\vec{v} = \overrightarrow{AC}$. On dit que $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont **orthogonaux** lorsque les droites (AB) et (AC) sont perpendiculaires.
Par convention, le vecteur $\vec{0}$ est orthogonal à tout vecteur de l'espace.

Propriété 3

Deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont orthogonaux si, et seulement si, leur produit scalaire est nul.

$$\vec{u} \perp \vec{v} \iff \vec{u} \cdot \vec{v} = 0$$

Méthode 4 : Prouver que deux vecteurs sont orthogonaux

On reprend le cube $ABCDEFGH$ d'arête 1.
Démontrer que les vecteurs $\overrightarrow{DF}$ et $\overrightarrow{BC}$ sont orthogonaux.

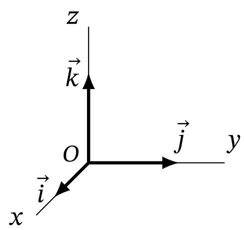
Correction

2 Base orthonormée. Repère orthonormé

2.1 Bases et repères orthonormés

Définition 6

- Une **base orthonormée** de l'espace est une base de l'espace telle que ses trois vecteurs soient orthogonaux deux à deux et tous de norme 1. Autrement dit, $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ est une base orthonormée signifie que :
$$\vec{i} \cdot \vec{j} = \vec{i} \cdot \vec{k} = \vec{j} \cdot \vec{k} = 0 \quad \text{et} \quad ||\vec{i}|| = ||\vec{j}|| = ||\vec{k}|| = 1$$
- Un **repère orthonormé** $(O ; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ est un repère tel que la base $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ soit orthonormée.



2.2 Expression analytique du produit scalaire

Propriété 4 : Expression analytique du produit scalaire

Dans un *base orthonormée* $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, $\vec{u}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}$ sont deux vecteurs de l'espace. Alors,

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = xx' + yy' + zz' \quad \text{et} \quad ||\vec{u}|| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

Remarque 3

Il est indispensable que la base soit orthonormée !

Méthode 5 : Utiliser les coordonnées de vecteurs pour prouver l'orthogonalité

On reprend le cube $ABCDEFGH$ d'arête 1.
On se place dans le repère $(D, \overrightarrow{DA}, \overrightarrow{DC}, \overrightarrow{DH})$.

1) Donner les coordonnées de chaque sommet du cube dans ce repère.
2) Démontrer que les vecteurs $\overrightarrow{AG}$ et $\overrightarrow{HF}$ sont orthogonaux.

Correction

Propriété 5 : Distance entre deux points

Dans un repère orthonormé $(O ; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ de l'espace, on considère deux points $A(x_A ; y_A ; z_A)$ et $B(x_B ; y_B ; z_B)$. On a alors :
$$AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2 + (z_B - z_A)^2}$$

Exemple 3 : Calculer une distance dans l'espace

On se place dans un repère orthonormé $(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$. Soit $A(1;2;5)$ et $B(3;3;3)$.

$$\begin{aligned} AB &= \sqrt{(3-1)^2+(3-2)^2+(3-5)^2} \\ &= \sqrt{2^2+1^2+2^2} \\ &= \sqrt{9} \\ &= 3 \end{aligned}$$

Méthode 6 : Travailler dans repère particulier de l'espace

On se place dans un repère orthonormé $(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ de l'espace.
On considère les $A(4;-2;0)$, $B(6;4;-2)$ et $C(12;6;0)$.
Quelle est la nature du triangle ABC ?

Correction

3 Orthogonalité dans l'espace

3.1 Orthogonalité de deux droites

Définition 7

Dire que deux droites sont **orthogonales** signifie que leurs parallèles passant par un même point quelconque sont perpendiculaires.

Remarque 4

- Deux droites orthogonales ne sont pas nécessairement coplanaires.
- Dans l'espace, deux droites sont perpendiculaires si, et seulement si, elles sont sécantes selon un angle droit. Autrement dit, si deux droites sont perpendiculaires alors elles sont orthogonales mais la réciproque est fausse.

Propriété 6

Deux droites (d) et (d') de vecteurs directeurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont orthogonales si, et seulement si, $\vec{u}\cdot\vec{v}=0$.

Exemple 4 : Vecteurs orthogonaux

Dans un repère orthonormé $(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$, on considère les droites (d) et (d'), respectivement de vecteurs directeurs $\vec{u}\begin{pmatrix}3\\-1\\2\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}5\\3\\-6\end{pmatrix}$.

Pour prouver que (d) et (d') sont orthogonales, on calcule :

$$\begin{aligned}\vec{u}\cdot\vec{v} &= 3\times 5+(-1)\times 3+2\times -6\\ &= 15-3-12=0\end{aligned}$$

Les vecteurs directeurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont orthogonaux. Donc (d) et (d') sont orthogonales

Méthode 7 : Trouver un repère orthonormé pour prouver l'orthogonalité de deux droites

On reprend le cube $ABCDEFGH$.
Justifier que les droites (BF) et (EH) sont orthogonales.

Correction

Remarque 5

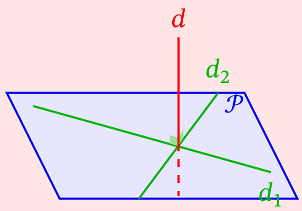
Les propriétés vues au début du collège se généralisent à l'espace :

- Si deux droites sont parallèles, alors toute droite orthogonale à l'une est orthogonale à l'autre.
- Si deux droites sont orthogonales, alors toute droite parallèle à l'une est orthogonale à l'autre.

3.2 Orthogonalité d'une droite et d'un plan

Définition 8

Dire qu'une droite est **orthogonale** à un plan
signifie qu'elle est orthogonale à deux droites sécantes de ce plan.



Méthode 8 : Prouver qu'une droite est orthogonale à un plan

Dans le cube $ABCDEFGH$, justifier que la droite (EH) est orthogonale au plan (ABF).

Correction

Propriété 7

Si une droite est orthogonale à un plan, alors elle est orthogonale à toute droite de ce plan.

Méthode 9 : Prouver que deux droites sont orthogonales

En reprenant l'exemple précédent, justifier que les droites (EH) et (AF) sont orthogonales.

Correction

Remarque 6

- Si deux plans sont parallèles, alors toute droite orthogonale à l'un est orthogonale à l'autre.
- Si deux plans sont orthogonaux à une même droite, alors ils sont parallèles entre eux.

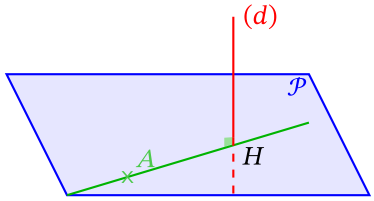
3.3 Projeté orthogonal d'un point dans l'espace

Définition 9

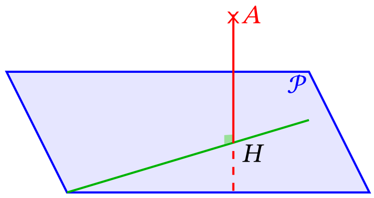
- Soit A un point et (d) une droite de l'espace. Il existe un unique plan passant par A et orthogonal à (d). La droite (d) est alors sécante à ce plan et leur point d'intersection H est appelé le **projeté orthogonal de A sur (d)**.

  Le projeté orthogonal H du point A sur la droite (d) est le point de (d) le plus proche de A. On dit que AH est la distance du point A à la droite (d).
- Soit A un point et $\mathcal{P}$ un plan de l'espace. Il existe une unique droite passant par A et orthogonale à $\mathcal{P}$. Le plan $\mathcal{P}$ est alors sécant à cette droite et leur point d'intersection H est appelé le**projeté orthogonal de A sur $\mathcal{P}$**.

  Le projeté orthogonal H du point A sur le plan $\mathcal{P}$ est le point de $\mathcal{P}$ le plus proche de A. On dit que AH est la distance du point A au plan $\mathcal{P}$.



pdf Vidéo



Méthode 10 : Calculer la distance d'un point à un plan

On se place dans un repère orthonormé $(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ de l'espace.
On considère les points $A(2;3;3)$, $B(3;1;2)$, $C(2;-1;0)$ et $D(12;18;-17)$.

a) Démontrer que les points A, B et C ne sont pas alignés.

b) Démontrer que A est le projeté orthogonal du point D sur le plan (ABC).

c) Quelle est la distance du point D au plan (ABC) ?

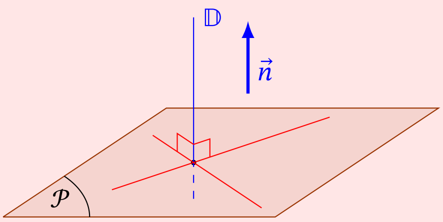
Correction

4 Équations cartésiennes de plans

4.1 Vecteur normal à un plan

Définition 10

Dire qu'un vecteur non nul $\vec{n}$ est **normal** à un plan $\mathcal{P}$ signifie que toute droite de vecteur directeur $\vec{n}$ est orthogonale au plan $\mathcal{P}$.



Méthode 11 : Déterminer un vecteur normal à un plan

On considère les points $A(3;-1;4)$, $B(0;5;1)$, $C(0;-1;-1)$ et le vecteur $\vec{n}(5;1;-3)$.

a) Démontrer que les points A, B et C ne sont pas alignés.

b) Le vecteur $\vec{n}$ est-il normal au plan (ABC) ?

4.2 Équations cartésiennes d'un plan

Propriété 8

Dans un repère orthonormé de l'espace :

- Un plan $\mathcal{P}$ de vecteur normal $\vec{n}(a\,;b\,;c)$ a pour équation $ax+by+cz+d=0$ avec d un nombre réel.
- Réciproquement, si a, b et c sont trois réels non tous nuls, l'ensemble des points $M(x\,;y\,;z)$ de l'espace tels que $ax+by+cz+d=0$ est un plan de vecteur normal $\vec{n}(a\,;b\,;c)$.

Vidéo

Définition 11

La relation $ax+by+cz+d=0$ est appelée **équation cartésienne** du plan $\mathcal{P}$.

Remarque 7

Un plan admet une infinité d'équations cartésiennes : en choisissant un autre vecteur normal ou un autre point de ce plan, on obtient une nouvelle équation cartésienne.

Méthode 12 : Déterminer une équation cartésienne d'un plan

On considère le plan $\mathcal{P}$ qui passe par le point $A(-2\,;0\,;5)$ et dont $\vec{n}(2\,;-6\,;4)$ est un vecteur normal.

1) Déterminer une équation cartésienne du plan $\mathcal{P}$.

2) Le point $B(1\,;-3\,;-1)$ appartient-il à $\mathcal{P}$?