Cours & méthodes

Logarithme népérien

9 ANALYSE

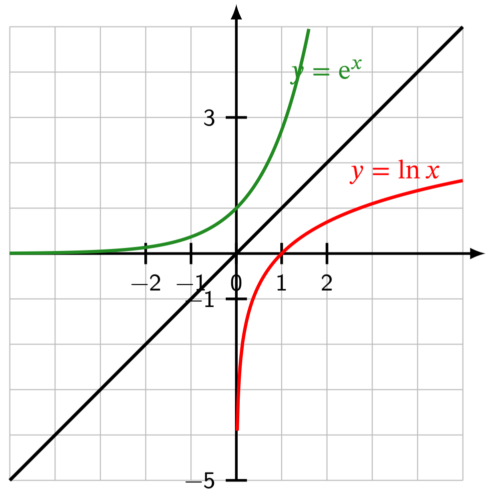
1 Fonction logarithme népérien

1.1 Introduction :

Propriété 1 : Lien avec l'exponentielle :

Pour tout réel a strictement positif, il existe un unique réel α tel que $\mathrm{e}^{\alpha} = a$ (Démontré à l'aide du TVI puisque la fonction exponentielle est strictement croissante)
On définit alors une nouvelle fonction appelée **logarithme népérien** qui à tout réel strictement positif, associe son unique antécédent par la fonction exponentielle.
On dit que la fonction logarithme népérien est la fonction **réciproque** de la fonction exponentielle.

Vidéo de cours



Propriété 2 : Propriété graphique :

Dans un repère orthonormé, les courbes représentatives des fonctions exponentielle et logarithme népérien sont symétriques par rapport à la droite d'équation $y = x$.

1.2 Définition :

Définition 1

La fonction logarithme népérien, notée $\ln$, est la fonction définie sur $]0; +\infty[$ qui à tout réel x strictement positif, associe le réel y tel que $\mathrm{e}^y = x$.

$$x > 0 \text{ et } y = \ln(x) \text{ équivaut à } x = \mathrm{e}^y$$

Vidéo de cours

Remarque 1

- On note $\ln x$, au lieu de $\ln(x)$, le logarithme népérien de x, lorsqu'il n'y a pas d'ambiguïté.
- $\mathrm{e}^0 = 1$ donc $\ln(1) = 0$.
- $\mathrm{e}^1 = \mathrm{e}$ donc $\ln(\mathrm{e}) = 1$.

1.3 Conséquences immédiates

Remarque 2

1) Pour tout réel x strictement positif, $\mathrm{e}^{\ln x} = x$.
2) Pour tout réel $x, \ln\left(\mathrm{e}^{x}\right) = x$.
3) Pour tout réel $a > 0$, l'équation $\mathrm{e}^{x} = a$ a pour unique solution $x = \ln a$.

Démonstration 1

1) Pour tout réel $x > 0$, $y = \ln x \iff \mathrm{e}^{y} = x$. Soit $\mathrm{e}^{\ln x} = x$.
2) Pour tout réel x, $\mathrm{e}^{x} = y \iff x = \ln(y) = \ln\left(\mathrm{e}^{x}\right)$. Soit $\ln\left(\mathrm{e}^{x}\right) = x$.

Méthode 1 : Appliquer la définition :Niveau *

Calculer :

- $A = \mathrm{e}^{\ln 5}$
- $B = \mathrm{e}^{-\ln 0{,}1}$
- $C = \ln\left(\sqrt{\mathrm{e}}\right)$
- $D = \ln\left(\frac{1}{\mathrm{e}}\right)$

2 Propriétés algébriques :

Propriété 3 : Propriété fondamentale :

Pour tous réels a et b strictement positifs :

$$\ln(a \times b) = \ln(a) + \ln(b)$$

Vidéo de cours

Démonstration

Soient $a > 0$ et $b > 0$ deux réels strictement positifs,
Par définition de la fonction logarithme népérien : $a = \mathrm{e}^{\ln a}$, $b = \mathrm{e}^{\ln b}$ et $a \times b = \mathrm{e}^{\ln(a \times b)}$
D'autre part, $a \times b = \mathrm{e}^{\ln a} \times \mathrm{e}^{\ln b} = \mathrm{e}^{\ln a + \ln b}$.
D'où $\mathrm{e}^{\ln(a \times b)} = \mathrm{e}^{\ln a + \ln b}$, donc $\ln(a \times b) = \ln a + \ln b$.

Propriété 4 : Propriétés déduites de la précédente :

Pour tous réels a et b strictement positifs et n entier relatif :

- $\ln\left(\frac{1}{a}\right) = -\ln a$
- $\ln\left(\frac{a}{b}\right) = \ln a - \ln b$
- $\ln\left(a^{n}\right) = n \ln a$
- $\ln\left(\sqrt{a}\right) = \frac{1}{2} \ln a$

Démonstration

- Soit $a > 0$ alors $\frac{1}{a} > 0$. Or $a \times \frac{1}{a} = 1$ donc

$$\ln\left(a \times \frac{1}{a}\right) = \ln 1 \iff \ln a + \ln \frac{1}{a} = 0 \iff \ln \frac{1}{a} = -\ln a$$

- Soient $a > 0$ et $b > 0$
$$\ln\left(\frac{a}{b}\right) = \ln\left(a \times \frac{1}{b}\right) = \ln a + \ln\frac{1}{b} = \ln a - \ln b$$
- Soient $a > 0$ un réel strictement positif et n un entier relatif,
$$e^{\ln(a^n)} = a^n \text{ et } e^{n\ln a} = \left(e^{\ln a}\right)^n = a^n$$
Donc $e^{\ln(a^n)} = e^{n\ln a}$ et par conséquent, $\ln(a^n) = n\ln a$.
- Soit $a > 0$ alors $\left(\sqrt{a}\right)^2 = a$ donc
$$\ln a = \ln\left(\sqrt{a}\right)^2 = 2\ln\sqrt{a}$$

Méthode 2 : Utiliser les propriétés calculatoires du logarithme népérien.

Exprimer en fonction de $\ln 2$ les nombres suivants :

- $A = \ln 8$
- $B = \ln\frac{1}{16}$
- $C = \frac{1}{2}\ln 16$
- $D = \frac{1}{2}\ln\frac{1}{4}$

Méthode 3 : Connaître les propriétés du logarithme népérien : Niveau **

Soit $x > 0$. Écrire le nombre suivant en fonction de $\ln x$:
$$A = -5\ln\left(x^3\right) + \ln\left(x^2\right) - \ln\left(\frac{1}{x}\right)$$

2.1 Variations :

Propriété 5 : Variations :

La fonction ln est strictement croissante sur $]0;+\infty[$.

Démonstration

Soient a et b deux réels tels que $0 < a < b$.
Par définition de la fonction logarithme népérien : $a = e^{\ln a}$ et $b = e^{\ln b}$. Ainsi, $e^{\ln a} < e^{\ln b}$.
La fonction exponentielle étant strictement croissante, on en déduit $\ln a < \ln b$.

Méthode 4 : Étudier les variations d'une fonction exponentielle : Niveau *

Étudier les variations de la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \mathrm{e}^x - 2x$

2.2 Conséquences

Propriété 6

Pour tous réels a et b strictement positifs :

- $\ln a = \ln b$ si, et seulement si, $a = b$
- $\ln a > \ln b$ si, et seulement si, $a > b$

Méthode 5 : Résoudre des équations en logarithme :Niveau *

Résoudre dans $\mathbb{R}$: $\ln(3x+1) = 1$

Méthode 6 : Résoudre des inéquations en logarithme : Niveau *

Résoudre dans $\mathbb{R}$: $\ln(5-2x) = \ln(x+1)$

Méthode 7 : Résoudre des équations/inéquations en logarithme népérien : Niveau **

Résoudre dans $\mathbb{R}$, $\ln(x+3) + \ln(x-1) > 0$

Méthode 8 : Résoudre des équations/inéquations avec des inconnues en exposant : Niveau *

Déterminer l'entier n à partir duquel $3 - 12 \times 0.9^n \geqslant 2.9$.

3 Dérivée du logarithme népérien

Propriété : Dérivée du logarithme népérien

La fonction logarithme népérien est dérivable sur $]0;+\infty[$
et pour tout réel $x > 0$, $\ln'(x) = \dfrac{1}{x}$

Vidéo de cours

Démonstration

- On admet que la fonction $\ln$ est dérivable sur $]0;+\infty[$.
- Soit f la fonction définie sur $]0;+\infty[$ par $f(x) = \mathrm{e}^{\ln x}$.
  f est dérivable sur $]0;+\infty[$ et pour tout réel $x > 0$, $f'(x) = \ln'(x) \times \mathrm{e}^{\ln x} = \ln'(x) \times x$.
  Or pour tout réel $x > 0$, $f(x) = x$ d'où $f'(x) = 1$
  Ainsi pour tout réel $x > 0$, $\ln'(x) \times x = 1$ donc $\ln'(x) = \dfrac{1}{x}$.

Méthode 9 : Dérivée du logarithme népérien : Niveau *

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}_+^*$, $f(x) = x\ln(x) - x$.
Déterminer l'expression de sa fonction dérivée.

4 Variations du logarithme népérien

Propriété

La fonction logarithme népérien est continue et strictement croissante sur $]0;+\infty[$.

Propriété

D'où le tableau de variation de la fonction ln :

x	0	1	$+\infty$
$\ln(x)$	$-\infty$	0	$+\infty$

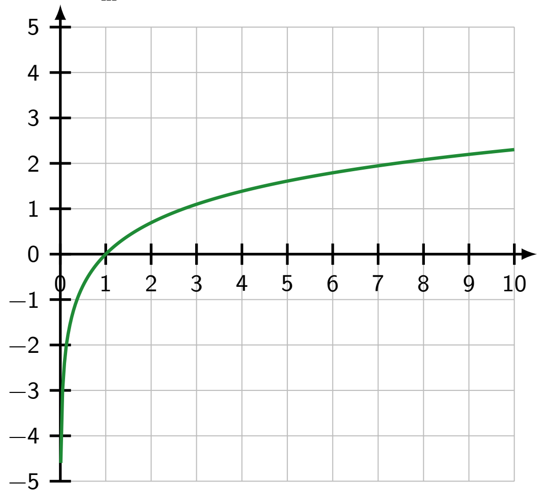
On admet que :

- $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x>0}} \ln(x) = -\infty$
- $\lim\limits_{x \to +\infty} \ln(x) = +\infty$

Vidéo de cours

5 Courbe représentative et limites du logarithme népérien

Notons $\mathcal{C}_{\ln}$ la courbe représentative de de la fonction logarithme népérien.



Propriété : Limites remarquables :

- $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x>0}} \ln(x) = -\infty$
- La courbe représentative du logarithme népérien admet la droite d'équation $x = 0$ comme **asymptote verticale**.
- $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x>0}} x\ln(x) = 0$
- $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\ln(x)}{x} = 0$
- Pour tout entier $n > 1$, $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x>0}} x^n \ln(x) = 0$
- Pour tout entier $n > 1$, $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\ln(x)}{x^n} = 0$

Méthode 10 : Étude complète d'une fonction logarithme népérien : Niveau *

On considère la fonction f définie sur $]0;+\infty[$ par : $f(x) = \dfrac{\ln(x)}{x}$.

1) Déterminer la limite de la fonction f en 0 . On admettra que la limite en $+\infty$ est égale à 0 .
2) Déterminer la limite de la fonction f en $+\infty$.
3) Montrer que, pour tout réel $x > 0$, on a : $f'(x) = \dfrac{1-\ln(x)}{x^2}$.
4) En déduire le sens de variation de la fonction f et dresser son tableau de variation.
   a) Montrer que la fonction f admet un extremum.
      Donner la valeur exacte de cet extremum et une valeur approchée au dixième.
   b) En quelle valeur de x cet extremum est-il atteint ?

6 Fonction du type $\ln u$:

Propriété

Soit u une fonction dérivable sur un intervalle I telle que, pour tout réel x appartenant à I, $u(x) > 0$.
La fonction $\ln(u)$ qui, à tout réel x appartenant à I associe le réel $\ln(u(x))$, est dérivable sur I et :

$$\big(\ln(u)\big)' = \frac{u'}{u}.$$

Méthode 11 : Calcul de la dérivée de $\ln u$: Niveau *

Calculer la fonction dérivée de $\ln\left(x^2+1\right)$ sur $\mathbb{R}$.

Méthode 12 : Étude d'une fonction de $\ln u$: Niveau *

On considère la fonction f définie sur l'intervalle]-2 ; 2[par :

$$f(x) = \ln\left(\frac{2+x}{2-x}\right).$$

On appelle $\mathcal{C}$ sa représentation graphique dans un repère orthogonal.

1) Déterminer l'ensemble de définition D_f de f.
2) Étudier la parité de f. Qu'en déduit-on pour la fonction f ?
3) Démontrer que la courbe $\mathcal{C}$ admet deux asymptotes verticales que l'on précisera.
4) Étudier le sens de variation de la fonction f puis dresser son tableau de variation sur D_f .

7 Logarithme décimal

Propriété 7 : Définition :

La fonction logarithme décimal, notée log, est définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par $\log(x) = \dfrac{\ln(x)}{\ln(10)}$.

Méthode 13 : Utiliser les propriétés calculatoires du logarithme décimal.

Sans calculatrice, calculer :

- $\log(1)$
- $\log(10)$
- $\log(100)$
- $\log(0,1)$
- $\log(0,01)$

Propriété 8 : Propriétés :

- Pour tous réels $a > 0$ et $b > 0$, $\log(ab) = \dots\ \dots$.
- Pour tout réel $a > 0$ et $n \in \mathbb{N}$, $\log(a^n) = \dots$.
- Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\log(10^n) = \dots$.
- $n = \log a \iff a = \dots$

Propriété 9 : Fonction réciproque :

Le logarithme décimale est la fonction réciproque de la fonction $x \mapsto 10^x$:

$$\log(10^x) = x \text{ et, } \quad 10^{\log(x)} = x$$

Remarque 3 : Comparaison des deux logarithmes :

Le logarithme népérien possède une fonction réciproque simple, contrairement au logarithme décimal. Il est donc utilisé en priorité par les matheux pour tout ce qui tourne autour de l'analyse (étude de fonctions, équations, ..).
Le logarithme décimal donne des valeurs numériques très simples pour les puissances de 10, contrairement au logarithme népérien. C'est donc un bon outil pour mesurer, très utilisé en physique, chimie, SVT.

Remarque 4

Le logarithme népérien est parfois notée (dans la littérature anglo-saxone notamment) log au lieu de ln, tandis que le logarithme décimal est noté $\log_{10}$, ou encore Log.