Parcours d'exercices

pgcd, théorèmes de Bézout et de Gauss

5 ARITHMÉTIQUE

Calcul de pgcd

Exercice 1

Déterminer rapidement le pgcd des paires d'entiers suivants :

1) 35 et 63.
2) 26 et 78 .
3) 52 et 143 .
4) 150 et 25 .

Exercice 2 : *

Déterminer l'ensemble des entiers naturels n tels que $\text{pgcd}(72, n) = 6$ et $n \leq 72$.

Exercice 3

Déterminer l'ensemble des couples $(m, n) \in \mathbb{N}^2$ tels que :

1) $mn = 5400$ et $\text{pgcd}(m, n) = 15$.
2) $m^2 - n^2 = 1620$ et $\text{pgcd}(m, n) = 6$.

Exercice 4

Déterminer l'ensemble des couples $(a, b) \in \mathbb{N}^2$ tels que $a + b = 72$ et $\text{pgcd}(a, b) = 9$.

Exercice 5

On définit, pour tout entier $n \geq 1$, la suite (u_n) par

$$u_n = \frac{1}{n} \times \text{pgcd}(24, n).$$

La suite (u_n) est-elle convergente ?

Algorithme d'Euclide

Exercice 6

Utiliser l'algorithme d'Euclide pour déterminer le PGCD de 246 et 189

Exercice 7

Justifier que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\text{pgcd}(26n + 7, n)$ est 7 si n est un multiple de 7 et 1 si n n'est pas un multiple de 7.

Exercice 8

Soit n un entier naturel non nul.

1) Démontrer que le reste de la division euclidienne de $21n + 4$ par $16n + 3$ est $5n + 1$.
2) a) Effectuer la division euclidienne de $16n + 3$ par $5n + 1$.
   b) En déduire que $\text{PGCD}(21n + 4, 16n + 3) = 1$.
3) En suivant le même raisonnement, déterminer le $\text{PGCD}(18n + 7, 2n + 1)$.

Exercice 9

Soit n un entier naturel non nul.
Quand on divise 364 par n, le reste vaut 12 et quand on divise 140 par n, le reste vaut 2.
Quelles sont les valeurs possibles de n ?

Exercice 10

Soient n un entier naturel, $\alpha = 2n + 1$ et $\beta = n + 3$.

1) Montrer que $\text{pgcd}(\alpha, \beta)$ divise 5.
2) Montrer que si $n \equiv 2\,[5]$, alors 5 est un diviseur commun à α et β.
3) En déduire que $\text{pgcd}(\alpha, \beta) = 5$ si, et seulement si, $n \equiv 2\,[5]$.

Exercice 11

Soit n un entier supérieur ou égal à 2.
Montrer que le pgcd de $n^2 - 1$ et $3(n+1)$ vaut $3(n+1)$ si $n \equiv 1\,[3]$ et $n + 1$ sinon.

Théorème de Bézout

Exercice 12

Justifier l'existence d'un couple d'entiers (u, v) tels que $130u + 231v = 1$ et en déterminer un.

Exercice 13

1) Démontrer que les nombres 24 et 13 sont premiers entre eux.
2) Déterminer alors deux entiers relatifs u et v tels que $24u + 13v = 1$.

Exercice 14

Justifier l'existence d'un couple (u, v) d'entiers vérifiant $31u + 70v = 1$ puis en déterminer un.

Exercice 15

Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrer à l'aide du théorème de Bézout que $5n - 7$ et $2n - 3$ sont premiers entre eux.

Exercice 16

Déterminer, en justifiant, si les propositions suivantes sont vraies ou fausses.

1) $2^{445} \equiv 2[15]$.
2) $\operatorname{pgcd}(2^{445}+4, 15) = 3$.

Exercice 17

Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrer que $\operatorname{pgcd}(4n+3, 2n+1) = 1$.

Équations diophantiennes

Exercice 18

À l'aide de la remontée de l'algorithme d'Euclide, déterminer un inverse de 134 modulo 57. Autrement dit, déterminer un entier a tel que $134a \equiv 1[57]$.

Exercice 19

Pour chacun des nombres suivants, déterminer s'il est inversible modulo 33 et, le cas échéant, en donner un inverse : $a = 3, b = 8, c = 44, d = 10, e = 5$.

Exercice 20

Déterminer, si elle existe, une solution particulière des équations diophantiennes suivantes :

1) $336u + 445v = 1$.
2) $426u - 68v = 2$.

Exercice 21

Pour quelles valeurs entières n l'équation $24x+32y = n$ admet-elle des solutions entières ?

Théorème de Gauss

Exercice 22

Déterminer l'ensemble des couples $(x, y) \in \mathbb{Z}^2$ tels que :

1) $38x - 65y = 0$
2) $76x = 112y$.
3) $12(x+3) = 5(y-4)$.

Exercice 23

Lister l'ensemble des couples d'entiers naturels (x, y) tels que : $7x = 19y \quad \text{et} \quad x \leq 100$.

Exercice 24

Déterminer l'ensemble des entiers x tels que :

1) $8x \equiv 0[55]$.
2) $6x \equiv 12[35]$.

Synthèse

Exercice 25

Déterminer l'ensemble des entiers naturels n tels que $6 \mid 4n$ et $4 \mid 5n$.

Exercice 26

1) Déterminer l'unique couple $(a, b) \in \mathbb{N}^2$ tel que $\operatorname{pgcd}(a, b) = 21$ et $3a = 5b$.
2) Déterminer l'ensemble des couples $(a, b) \in \mathbb{Z}^2$ tels que $\operatorname{pgcd}(a, b) = 18$ et $7a = 4b$.

Exercice 27 : D'après bac S

Un magicien propose le tour suivant : « *Multipliez par 12 le numéro de votre jour de naissance. Ajoutez à ce résultat le numéro de votre mois de naissance multiplié par 31. Je vais deviner votre date de naissance.* »

1) Résoudre dans $\mathbb{Z}^2$ l'équation $(E_0) : 12x = 31y$.
2) Déterminer une solution particulière dans $\mathbb{Z}^2$ de l'équation $(E_1) : 12x + 31y = 1$.
3) Déterminer une solution particulière $(x_0, y_0) \in \mathbb{Z}^2$ de l'équation $(E) : 12x + 31y = 503$.
4) Montrer que si $(x, y) \in \mathbb{Z}^2$ est solution (E), alors le couple $(x - x_0, y - y_0)$ est solution de (E_0). En déduire l'ensemble des solutions de (E).
5) Justifier que (E) admet une unique solution vérifiant $1 \leq y \leq 12$ et la déterminer. Quelle est la date de naissance d'une personne obtenant 503 ?

Exercice 28

Déterminer les couples $(a; b)$ d'entiers naturels tels que $a \leqslant b$ vérifiant : a) $a+b = 296$ et $\operatorname{pgcd}(a; b) = 37$.
b) $ab = 7776$ et $\operatorname{pgcd}(a; b) = 18$.

Exercice 29

1) Existe-t-il des entiers relatifs n tels que 3 divise n^2+1 ?
2) En déduire, quel que soit $n \in \mathbb{Z}$, le $\operatorname{pgcd}\left(7n^2+4, n^2+1\right)$.

Exercice 30

Dans $\mathbb{Z}^2$, nous considérons l'équation

$x + y - 1 = \operatorname{pgcd}(x, y) \quad (E)$

1) Justifier que si (x, y) est une solution de (E), alors $\operatorname{pgcd}(x, y) = 1$. En déduire que si (x, y) est une solution de (E), alors x est impair.
2) Déterminer l'ensemble de solutions de (E).

Corrections

(Correction)

Corrigé de l'exercice 1

1) $\text{pgcd}(35;63) = \text{pgcd}(7\times 5; 7\times 9) = 7\times \text{pgcd}(5;9) = 7$ car 5 et 9 sont premiers entre eux.

2) $\text{pgcd}(52;143) = \text{pgcd}(13\times 4; 13\times 11) = 13$ car 4 et 11 sont premiers entre eux.

3) 26 est un diviseur de 78 car $78 = 26\times 3$, donc $\text{pgcd}(26;78) = 26$.

4) $\text{pgcd}(150;25) = 25$ car 25 est un diviseur de 150 .

Corrigé de l'exercice 2

Soit n un entier naturel tel que $PGCD\,(72;n) = 6$ et $n \leqslant 72$.

On remarque que 72 est bien un multiple de 6.

De plus, la condition $PGCD\,(72;n) = 6$ impose que n est un multiple de 6.

Les multiples de 6 inférieurs à 72 sont dans $\{6;12;18;24;30;36;42;48;54;60;66;72\}$.

Or $72 = 1\times 72 = 2\times 36 = 3\times 24 = 4\times 18 = 6\times 12 = 8\times 9$.

On peut donc supprimer tous les diviseurs de 72 supérieurs à 6 : $\{12;18;24;36;72\}$.

On peut également rayer de cette liste leurs multiples inférieurs à 72 : $\{36;48;60;54\}$.

Il reste donc les nombres 6, $30 = 6\times 5$, $42 = 6\times 7$, $66 = 6\times 11$, qui vérifient bien $PGCD\,(72;n) = 6$ car $72 = 6\times 12$.

Corrigé de l'exercice 3

1. Soit $(m;n) \in \mathbb{N}^2$ tel que $mn = 5400$ et $PGCD(m;n) = 15$. Il existe donc un couple d'entiers $(p;q)$ tel que $m = 15p$ et $n = 15q$. On a alors $15p\times 15q = 5400$, d'où $pq = 24$. Par ailleurs, $15 = PGCD(m;n) = 15\times PGCD(p;q)$, d'où $PGCD(p;q) = 1$. Ainsi $(p;q) \in \{(1;24)\,;(3;8)\,;(24;1)\,;(8;3)\}$ donc :
$$(m;n) \in \{(15;360)\,;(45;120)\,;(360;15)\,;(120;45)\}.$$
Réciproquement, on vérifie bien que ces couples sont solutions du problème.
2. Soit $(m;n) \in \mathbb{N}^2$ tel que $m^2 - n^2 = 1620$ et $PGCD\,(m;n) = 6$. Il existe donc $(p;q)$ tel que $m = 6p$ et $n = 6q$. Ainsi, $m^2 - n^2 = 36\left(p^2 - q^2\right) = 1620$ donc $p^2 - q^2 = 45$, soit $(p-q)(p+q) = 45$ et $PGCD\,(p;q) = 1$. Or $(p;q) \in \mathbb{N}^2$ donc $p - q \leqslant p + q$ $\begin{cases} p-q=1 \\ p+q=45 \end{cases}$ ou $\begin{cases} p-q=3 \\ p+q=15 \end{cases}$ ou $\begin{cases} p-q=5 \\ p+q=9 \end{cases}$ car puisque $(p;q) \in \mathbb{N}^2$. D'où $\begin{cases} p=23 \\ q=22 \end{cases}$ ou $\begin{cases} p=9 \\ q=6 \end{cases}$ ou $\begin{cases} p=7 \\ q=2 \end{cases}$. On en déduit que $(m;n) \in \{(138;132)\,;(54;36)\,;(42;12)\}$. Réciproquement, on vérifie que ces couples sont bien tous solution du problème.

Corrigé de l'exercice 4

Soit $(a;b) \in \mathbb{N}^2$ tel que $a + b = 72$ et $PGCD\,(a;b) = 9$.

Soient c et d les entiers naturels tels que $a = 9c$ et $b = 9d$.

On peut donc écrire $9c + 9d = 72$, d'où $c + d = 8$ et $PGCD\,(c;d) = 1$.

On en déduit que $(c;d) \in \{(1;7)\,;(3;5)\,;(7;1)\,;(5;3)\}$,

d'où $(a;b) \in \{(9;63)\,;(27;45)\,;(63;9)\,;(45;27)\}$.

Réciproquement, on vérifie que ces couples sont bien solutions du problème.

Corrigé de l'exercice 5

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $0 \leqslant PGCD\,(24;n) \leqslant 24$.

Donc, pour tout $n \geqslant 1$, $0 \leqslant \frac{1}{n} PGCD\,(24;n) \leqslant \frac{24}{n}$.

Par encadrement, on en déduit que (u_n) converge vers 0.

Corrigé de l'exercice 6

$246 = 189 + 57$ $189 = 57\times 3 + 18$ $57 = 18\times 3 + 3$ $18 = 3\times 6 + 0$

On en déduit que $PGCD\,(246;189) = 3$.

Corrigé de l'exercice 7

Soit $n \in \mathbb{N}$.

Avec le Lemme d'Euclide, $PGCD(26n + 7;n) = PGCD(7;n)$.

Deux cas sont alors possibles :

- Si n est un multiple de 7, alors $PGCD(7;n) = 7$ d'où $PGCD(26n + 7;n) = 7$.
- Sinon, $PGCD(7;n)$ étant positif et divisant 7, on a $PGCD(7;n) = 1$.

Ainsi, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $PGCD(26n + 7;n)$ est donc bien égal à 7 si n est multiple de 7 et à 1 sinon.

Corrigé de l'exercice 8

1. $21n + 4 = (16n + 3) + (5n + 1)$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $0 \leqslant 5n + 1 < 16n + 3$ donc $5n + 1$ est le reste de la division euclidienne de $21n + 4$ par $16n + 3$.
2. a. $16n + 3 = 3(5n + 1) + n$ et $0 \leqslant n < 5n + 1$ donc le reste de la division euclidienne de $16n + 3$ par $5n + 1$ est n.

   b. $PGCD(21n + 4;16n + 3) = PGCD(16n + 3;5n + 1) = PGCD(5n + 1;n)$. De plus, le reste de la division euclidienne de $5n + 1$ par n est 1, donc $PGCD\,(5n + 1;n) = 1$, d'où $PGCD\,(21n + 4;16n + 3) = 1$.
3. $18n + 7 = 8\,(2n + 1) + 2n - 1$ et $0 < 2n - 1 < 2n + 1$ pour tout $n > 0$, donc $2n - 1$ est le reste de la division euclidienne de $18n + 7$ par $2n + 1$. Donc $PGCD\,(18n + 7;2n + 1) = PGCD\,(2n - 1;2n + 1)$. De plus, $2n + 1 = (2n - 1)\times 1 + 2$ et $2 < 2n - 1$ si, et seulement si, $2n > 3$ c'est-à-dire si, et seulement si, $n > 1$. Ainsi :
   - si $n = 1$, alors $PGCD(18n + 7;2n + 1) = PGCD(25;3) = 1$;
   - si $n > 1$, alors $PGCD(18n + 7;2n + 1) = PGCD(2n - 1;2) = 1$ car $2n - 1$ est impair.

Corrigé de l'exercice 9

D'après l'énoncé, il existe :

- un entier m tel que $364 = nm + 12$ et $12 < n$. On a ainsi $352 = nm$;
- un entier p tel que $140 = np + 2$ et $2 < n$. On a ainsi $138 = np$.

Donc n est un diviseur commun à 352 et 138, donc un diviseur de $PGCD(352; 138)$.

On utilise l'algorithme d'Euclide : $352 = 138 \times 2 + 76$; $138 = 76 \times 1 + 62$; $76 = 62 \times 1 + 14$; $62 = 14 \times 4 + 6$; $14 = 6 \times 2 + 2$ et $6 = 2 \times 3 + 0$, donc $PGCD(352; 138) = 2$. Les diviseurs communs à 352 et 138 sont donc 1, 2 et leurs opposés. Les valeurs possibles de l'entier naturel n sont donc $n = 1$ ou $n = 2$. Cependant, ces valeurs obtenues sont incompatibles avec les inégalités obtenues en début d'exercice sur le reste. Il n'existe donc aucun entier n vérifiant ces deux conditions.

Corrigé de l'exercice 10

1. $PGCD\,(2n+1; n+3) = PGCD\,(-5; n+3) = PGCD\,(5; n+3)$.
   Donc $PGCD\,(2n+1; n+3)$ est un diviseur de 5.
2. Si $n \equiv 2\,[5]$, alors $2n + 1 \equiv 2 \times 2 + 1 \equiv 0\,[5]$.
   Donc $\alpha \equiv 0\,[5]$, c'est-à-dire que 5 divise α. De même, si $n \equiv 2\,[5]$, alors $n + 3 \equiv 2 + 3 \equiv 0\,[5]$. Donc $\beta \equiv 0\,[5]$, c'est-à-dire que 5 divise β. En conclusion, 5 est un diviseur commun à α et β.
3. On a montré que si $n \equiv 2\,[5]$, alors 5 divise α et β, donc 5 divise leur PGCD. De plus, d'après la question 1, $PGCD\,(2n+1; n+3)$ divise 5. D'où $PGCD\,(2n+1; n+3) = 5$. Réciproquement, si $PGCD\,(2n+1; n+3) = 5$, alors 5 divise $n + 3$, donc $n \equiv -3\,[5]$, soit $n \equiv 2\,[5]$. D'où l'équivalence.

Corrigé de l'exercice 11

Pour tout $n \geqslant 2$, $n^2 - 1 = (n-1)(n+1)$
donc
$PGCD\left(n^2 - 1; 3(n+1)\right) = (n+1)\,PGCD\,(n-1; 3)$.
Or $PGCD\,(n-1; 3) = 3$ si 3 divise $n-1$ et $PGCD\,(n-1; 3) = 1$ sinon.
On a donc bien $PGCD\left(n^2 - 1; 3(n+1)\right) = 3(n+1)$
si $n - 1 \equiv 0\,[3]$,
c'est-à-dire si $n \equiv 1\,[3]$,
et $PGCD\left(n^2 - 1; 3(n+1)\right) = n + 1$ sinon.

Corrigé de l'exercice 12

On utilise l'algorithme d'Euclide :
$231 = 130 \times 1 + 101$
$130 = 101 \times 1 + 29$
$101 = 29 \times 3 + 14$
$29 = 14 \times 2 + 1$
$14 = 1 \times 14 + 0$.
Le dernier reste non nul est 1, donc $PGCD(231; 130) = 1$. D'après le théorème de Bézout, il existe donc un couple $(u; v)$ tel que $130u + 231v = 1$. On détermine un tel couple en remontant l'algorithme :
$1 = 29 - 14 \times 2$
$= 29 - (101 - 29 \times 3) \times 2$
$= 29 \times 7 - 101 \times 2$
$= 130 \times 7 - 101 \times 9$
$= 130 \times 16 - 231 \times 9$.
Un couple solution est donc $(16; -9)$.

Corrigé de l'exercice 13

1. Les diviseurs positifs de 24 sont 1, 2, 3, 4, 6, 8, 12 et 24. Les diviseurs positifs de 13 sont 1 et 13. On en déduit donc que 24 et 13 sont premiers entre eux.
2. Pour déterminer un couple solution de l'équation $24u + 13v = 1$, on écrit l'algorithme d'Euclide : $24 = 13 \times 1 + 11$; $13 = 11 \times 1 + 2$ et $11 = 2 \times 5 + 1$, puis sa remontée : $1 = 11 - 2 \times 5 = 11 - (13 - 11) \times 5 = 11 \times 6 - 13 \times 5$. Donc $1 = (24 - 13) \times 6 - 13 \times 5 = 24 \times 6 - 13 \times 11$. Le couple $(6; -11)$ est donc solution de cette équation.

Corrigé de l'exercice 14

1. Écrivons les divisions euclidiennes successives de l'algorithme d'Euclide pour 70 et 31 :
   $70 = 31 \times 2 + 8$
   $31 = 8 \times 3 + 7$
   $8 = 7 \times 1 + 1$.
   On en déduit que 70 et 31 sont premiers entre eux, ce qui justifie l'existence d'un couple solution. Puis, par remontée de l'algorithme d'Euclide :
   $1 = 8 - 7$
   $= 8 - (31 - 8 \times 3)$
   $= 8 \times 4 - 31$
   $= (70 - 31 \times 2) \times 4 - 31$
   $= 70 \times 4 - 31 \times 9$.
   Une solution particulière de l'équation $31u + 70v = 1$ est donc le couple $(-9; 4)$.

Corrigé de l'exercice 15

$2(5n-7) - 5(2n-3) = 1$ donc, d'après le théorème de Bézout, $5n - 7$ et $2n - 3$ sont premiers entre eux.

Corrigé de l'exercice 16

1. Établissons une table de congruence modulo 15 des puissances de 2.

n modulo 15	0	1	2	3	4	5	6	7
2^n modulo 15	1	2	4	8	$16 \equiv 1$	$32 \equiv 2$	$64 \equiv 4$	128

   On a $2^{445} = \left(2^4\right)^{111} \times 2^1$ donc $2^{445} \equiv 1^{111} \times 2 \equiv 2\,[15]$. Et donc la proposition est vraie.
2. D'après la question précédente, $2^{445} + 4 \equiv 6\,[15]$, donc il existe un entier k tel que $2^{445} + 4 = 15k + 6$, donc $2^{445} + 4 = 3(5k + 2)$ est divisible par 3, mais pas par 5. Comme les diviseurs positifs de 15 sont 1, 3, 5 et 15, le PGCD de $2^{445} + 4$ et 15 est bien 3.

Corrigé de l'exercice 17

On a $(4n+3)-2(2n+1)=1$. Il existe donc u et v deux entiers relatifs tels que $u(4n+3)+v(2n+1)=1$ et donc, d'après le théorème de Bézout, $4n+3$ et $2n+1$ sont premiers entre eux.

Corrigé de l'exercice 18

L'algorithme d'Euclide pour les entiers 134 et 57 s'écrit :

$134 = 57\times 2+20$

$57 = 20\times 2+17$

$20 = 17+3$

$17 = 3\times 5+2$

$3 = 2+1$.

On en déduit que 134 et 57 sont premiers entre eux, donc qu'il existe un couple d'entiers $(a;b)$ tel que $134a-57b=1$, autrement dit que 134 est inversible modulo 57. On écrit ensuite la remontée de l'algorithme d'Euclide : $1=3-2$

$1 = 3-(17-3\times 5)$

$1 = 3\times 6-17$

$1 = (20-17)\times 6-17$

$1 = 20\times 6-17\times 7$

$1 = 20\times 6-(57-20\times 2)\times 7$

$1 = 20\times 20-57\times 7$.

Un inverse de 134 modulo 57 est donc 20 car $20\times 20 = 57\times 7+1$ donc $134\times 20\equiv 20\times 20\equiv 1\,[57]$.

Corrigé de l'exercice 19

$a=3$ est inversible modulo 33 si, et seulement si, il existe un entier u tel que $3u\equiv 1\,[33]$, c'est-à-dire si, et seulement si, il existe deux entiers u et v tels que $3u+33v=1$, ce qui est impossible car, sinon, 3 diviserait 1. Donc 3 n'est pas inversible modulo 33.

$b=8$ est inversible modulo 33 si, et seulement si, il existe un entier u tel que $8u\equiv 1\,[33]$, c'est-à-dire si, et seulement si, il existe deux entiers u et v tels que $8u+33v=1$, ce qui est le cas d'après le théorème de Bézout, car 8 et 33 sont premiers entre eux. On détermine une solution particulière : $33=8\times 4+1$ donc $8\times(-4)+33\times 1=1$. Un inverse de 8 modulo 33 est donc –4.

$c=44$ est inversible modulo 33 si, et seulement si, il existe un entier u tel que $44u\equiv 1\,[33]$, c'est-à-dire si, et seulement si, il existe deux entiers u et v tels que $44u+33v=1$, ce qui est impossible car, sinon, 11 diviserait 1. Donc 44 n'est pas inversible modulo 33.

$d=10$ est inversible modulo 33 si, et seulement si, il existe un entier a tel que $10a\equiv 1\,[33]$, c'est-à-dire si, et seulement si, il existe deux entiers a et b tels que $10a+33b=1$, ce qui est le cas d'après le théorème de Bézout, car 10 et 33 sont premiers entre eux. On détermine une solution particulière : $33=10\times 3+3$ et $10=3\times 3+1$, donc $1=10-3\times 3 = 10-(33-10\times 3)\times 3 = 10\times 10-33\times 3$. Un inverse de 10 modulo 33 est 10.

$e=5$ est inversible modulo 33 si, et seulement si, il existe un entier a tel que $5a\equiv 1\,[33]$. On vient de montrer que $10\times 10\equiv 1\,[33]$, donc $5\times 20\equiv 1\,[33]$. Donc 5 est inversible modulo 33 et un inverse de 5 est 20.

Corrigé de l'exercice 20

1. Écrivons l'algorithme d'Euclide pour les entiers 445 et 336 :
   $445=336\times 1+109$
   $336=109\times 3+9$
   $109=9\times 12+1$
   On en déduit que 445 et 336 sont premiers entre eux, donc l'équation $336u+445v=1$ admet bien des solutions. On en détermine une par remontée de l'algorithme d'Euclide :
   $1=109-9\times 12$
   $1=109-(336-109\times 3)\times 12$
   $1=109\times 37-336\times 12$
   $1=(445-336)\times 37-336\times 12$
   $1=445\times 37-336\times 49$.
   Une solution particulière est donc le couple $(-49;37)$.

2. $426u-68v=2 \Leftrightarrow 213u-34v=1$. Écrivons l'algorithme d'Euclide pour les entiers 213 et 34 :
   $213=34\times 6+9$
   $34=9\times 3+7$
   $9=7\times 1+2$
   $7=2\times 3+1$
   On en déduit que l'équation $213u-34v=2$ admet bien des solutions car 213 et 34 sont premiers entre eux. On en détermine une par remontée de l'algorithme d'Euclide : $1=7-2\times 3=7-(9-7)\times 3=7\times 4-9\times 3$ donc $1=(34-9\times 3)\times 4-9\times 3=34\times 4-9\times 15$, $1=34\times 4-(213-34\times 6)\times 15=34\times 94-213\times 15$. Un couple solution est donc $(-15;-94)$.

Corrigé de l'exercice 21

$PGCD(24;32)=8$ donc l'équation $24x+32y=n$ admet des solutions si, et seulement si, n est un multiple de 8.

Corrigé de l'exercice 22

1. Soient x et y deux entiers tels que $38x-65y=0$. $38x-65y=0 \Leftrightarrow 38x=65y$, donc 38 divise $65y$. Or $38=19\times 2$ et $65=13\times 5$ sont premiers entre eux donc, d'après le théorème de Gauss, 38 divise y.
   Soit alors k l'entier tel que $y=38k$. On a ainsi $38x=65\times 38k$, donc $x=65k$.
   Finalement, on a montré que si $38x-65y=0$, alors il existe un entier k tel que $x=65k$ et $y=38k$.
   Réciproquement, pour tout entier k, le couple $(65k;38k)$ est solution de l'équation car $38\times 65k-65\times 38k=0$. L'ensemble des solutions est donc $\{(65k;38k)\,;\,k\in\mathbb{Z}\}$.

2. Soit $(x;y)$ un couple d'entiers tel que $76x=112y$. En divisant les deux côtés de l'égalité par 4, on obtient $19x=28y$, donc 19 divise $28y$. Or 19 et 28 sont premiers entre eux, donc, d'après le théorème de Gauss, 19 divise y. Soit alors k l'entier tel que $y=19k$. Alors $19x=28\times 19k$ donc

$x = 28k$. Donc $(x;y) \in \{(28k;19k)\,;k \in \mathbb{Z}\}$. Réciproquement, on vérifie que tout élément de cet ensemble est un couple solution.

3. Soit $(x;y)$ un couple d'entiers tel que $12(x+3) = 5(y-4)$. Alors 12 divise $5(y-4)$. Comme 12 et 5 sont premiers entre eux donc, d'après le théorème de Gauss, 12 divise $(y-4)$. Soit alors k l'entier tel que $y-4 = 12k$. On a $12(x+3) = 5 \times 12k$, donc $x+3 = 5k$. Finalement, si $(x;y)$ est solution, alors il existe un entier k tel que $x = 5k-3$ et $y = 12k+4$. Réciproquement, pour tout entier k, $(5k-3;12k+4)$ est solution de l'équation. Donc l'ensemble des solutions est $\{(5k-3;12k+4)\,;k \in \mathbb{Z}\}$.

Corrigé de l'exercice 23

Soit $(x;y)$ un couple d'entiers naturels tel que $\begin{cases} 7x = 19y \\ x \leqslant 100 \end{cases}$.

Or 7 et 19 sont premiers entre eux donc, d'après le théorème de Gauss, 19 divise x. Soit k l'entier tel que $x = 19k$. Alors $7 \times 19k = 19y$, donc $y = 7k$. De plus, $0 \leqslant x \leqslant 100$, donc $0 \leqslant k \leqslant 5$. Finalement, $(x;y) \in \{(0;0)\,;(19;7)\,;(38;14)\,;(57;21)\,;(76;28)\,;(95;35)\}$. Réciproquement, on vérifie que tous ces couples sont solution.

Corrigé de l'exercice 24

1. $8x \equiv 0\,[55] \Leftrightarrow 55|8x \Leftrightarrow$ il existe $y \in \mathbb{Z}$ tel que $8x = 55y$. Or 8 et 55 sont premiers entre eux donc, d'après le théorème de Gauss, 8 divise y. Soit k l'entier tel que $y = 8k$. Alors $8x = 55 \times 8k$ donc $x = 55k$. Réciproquement, pour tout entier k, $8 \times 55k \equiv 0\,[55]$. Donc $8x \equiv 0\,[55] \Leftrightarrow x \equiv 0\,[55]$: l'ensemble des solutions est l'ensemble des multiples de 55.

2. $6x \equiv 12\,[35] \Leftrightarrow 6(x-2) \equiv 0\,[35] \Leftrightarrow$ il existe $y \in \mathbb{Z}$ tel que $6(x-2) = 35y$. Or 6 et 35 sont premiers entre eux, donc, d'après le théorème de Gauss, 6 divise y. Soit alors k l'entier tel que $y = 6k$. Alors $6(x-2) = 35 \times 6k$ donc $x-2 = 35k$. Réciproquement, pour tout entier k, $6 \times 35k \equiv 0\,[35]$ donc $35k+2$ est solution. Finalement, l'ensemble des solutions est l'ensemble $\{35k+2; k \in \mathbb{Z}\}$.

Corrigé de l'exercice 25

Soit n un entier naturel tel que $6|4n$ et $4|5n$. Soit k l'entier tel que $4n = 6k$. Alors $2n = 3k$.
Or 2 et 3 sont premiers entre eux donc, d'après le théorème de Gauss, 3 divise n.
Posons p l'entier tel que $n = 3p$.
De même, 4 divise n car $4|5n$, et 4 et 5 sont premiers entre eux donc, d'après le théorème de Gauss, 4 divise $n = 3p$.
En appliquant à nouveau le théorème de Gauss, on obtient que 4 divise p.
Ainsi, il existe un entier q tel que $n = 3 \times 4q = 12q$.
Réciproquement, s'il existe un entier q tel que $n = 12q$ alors n est divisible par 6 et par 4, donc $4n$ et $5n$ le sont aussi.
L'ensemble cherché est donc $\{12k; k \in \mathbb{Z}\}$.

Corrigé de l'exercice 26

1. Soit $(a;b)$ un couple d'entiers tel que $PGCD(a;b) = 21$ et $3a = 5b$.
Soient α et β les entiers tels que $a = 21\alpha$ et $b = 21\beta$.
Alors α et β sont premiers entre eux, sinon a et b admettraient un diviseur commun plus grand que 21, et $3a = 5b \Rightarrow 3\alpha = 5\beta$.
On a ainsi que 3 divise 5β, donc, d'après le théorème de Gauss, 3 divise β, car 3 et 5 sont premiers entre eux.
Soit k l'entier tel que $\beta = 3k$.
Ainsi, on a $3\alpha = 5 \times 3k$, d'où $\alpha = 5k$.
Mais α et β sont premiers entre eux, donc $k = 1$, sinon, α et β admettraient k comme diviseur commun.
Au final, on a donc $a = 21 \times 5 = 105$ et $b = 21 \times 3 = 63$.
Pour finir, on vérifie que ce couple est bien solution du problème initial : on a bien $PGCD(a;b) = 21$ et $3a = 3 \times 21 \times 5 = 5b$.
Donc l'unique couple $(a;b) \in \mathbb{N}^2$ tel que $PGCD(a;b) = 21$ et $3a = 5b$ est $a = 105$ et $b = 63$.

2. Soit $(a;b)$ un couple d'entiers tel que $PGCD(a;b) = 18$ et $7a = 4b$.
Alors 7 divise $4b$ et 7 et 4 sont premiers entre eux donc, d'après le théorème de Gauss, 7 divise b.
Soit alors k l'entier tel que $b = 7k$. On a donc aussi $7a = 4 \times 7k$, c'est-à-dire $a = 4k$.
De plus, 18 est le PGCD de a et b, donc 18 divise $b = 7k$.
Comme 18 et 7 sont premiers entre eux, d'après le théorème de Gauss, on en déduit que 18 divise k.
Ainsi, il existe un entier c tel que $a = 4 \times 18c = 72c$ et $b = 7 \times 18c = 126c$.
Mais $PGCD(a;b) = 18$, donc nécessairement $c = 1$.
En effet, si on avait $c \neq 1$, $18c$ sera un diviseur commun de a et b et on aurait $18c > 18$, ce qui est impossible car 18 est le PGCD de a et b.
En conclusion, l'unique couple $(a;b) \in \mathbb{N}^2$ respectant ces deux conditions est donc $(72;126)$.

Corrigé de l'exercice 27

1. Si $(X;Y) \in \mathbb{Z}^2$ est solution de l'équation $12X = 31Y$, alors 31 divise $12X$. Or 12 et 31 sont premiers entre eux donc, d'après le théorème de Gauss; 31 divise X. Soit $k \in \mathbb{Z}$ tel que $X = 31k$. Alors $12 \times 31k = 31Y$, d'où $Y = 12k$. Réciproquement, pour tout $k \in \mathbb{Z}$, $12 \times 31k = 31 \times 12k$, donc l'ensemble des solutions est $S_0 = \{(31k;12k)\,;k \in \mathbb{Z}\}$.

2. On écrit l'algorithme d'Euclide pour 12 et 31.
$31 = 12 \times 2 + 7$
$12 = 7 \times 1 + 5$
$7 = 5 \times 1 + 2$
$5 = 2 \times 2 + 1$.
Puis on remonte cet algorithme.
$1 = 5 - 2 \times 2 = 5 - (7-5) \times 2$

$= 5 \times 3 - 7 \times 2$

$= (12 - 7) \times 3 - 7 \times 2$

$= 12 \times 3 - 7 \times 5$

$= 12 \times 3 - (31 - 12 \times 2) \times 5$

$= 12 \times 13 - 31 \times 5.$

Une solution particulière de $12x + 31y = 1$ est donc le couple $(13; -5)$.

3. Comme $12 \times 13 + 31 \times (-5) = 1$, alors $12 \times (13 \times 503) + 31 \times (-5 \times 503) = 503$. Une solution particulière de $12x + 31y = 503$ est donc $(6539; -2515)$.

4. Soit $(x; y) \in \mathbb{Z}^2$ une solution de l'équation $12x + 31y = 503$. Alors $12x + 31y = 12 \times 6539 - 31 \times 2515$, donc $12(x - 6539) = 31(-2515 - y)$, et donc le couple $(x - 6539; -2515 - y)$ est solution de (E_0). D'après la question 1., il existe donc $k \in \mathbb{Z}$ tel que $x - 6539 = 31k$ et $-2515 - y = 12k$, soit $x = 31k + 6539$ et $y = -2515 - 12k$. Réciproquement, on vérifie que, pour tout $k \in \mathbb{Z}$, le couple $(31k + 6539; -2515 - 12k)$ est bien solution de (E). En conclusion, l'ensemble des solutions de (E) est donc $S = \{(31k + 6539; -2515 - 12k) ; k \in \mathbb{Z}\}$.

5. Si $(x; y)$ est une solution de (E) telle que $1 \leqslant y \leqslant 12$, alors il existe un entier k tel que $y = -2515 - 12k$ et $1 \leqslant -2515 - 12k \leqslant 12 \Leftrightarrow 2516 \leqslant -12k \leqslant 2527 \Leftrightarrow -\frac{2527}{12} \leqslant k \leqslant -\frac{2516}{12}$. Or $-\frac{2527}{12} \simeq -210,6$ et $-\frac{2516}{12} \simeq -209,7$ donc, comme $k \in \mathbb{Z}$, $k = -210$. Donc $(29; 5)$ est l'unique solution de (E) telle que $1 \leqslant y \leqslant 12$. On en déduit donc qu'une personne obtenant un résultat final de 503 est née le 29 mai.

6. a. On modifie l'algorithme de la manière suivante :

```
Demander m
Pour x allant de 1 à 31 faire :
    Pour y allant de 1 à 12 faire :
    z ← 12x + 31y
    Si z = m :
        afficher (x; y)
    Fin Pour
Fin Pour
```

b. En Python, cet algorithme s'écrit comme suit.

```python
m=int(input("m"))
for y in range(1,12):
    for x in range(1,31):
        z=12*x+31*y
        if z==m:
            print(x, y)
```

En donnant en entrée $m = 355$, on obtient en sortie le couple $(27; 1)$. Une personne obtenant 355 sera donc née le 27 janvier.

Corrigé de l'exercice 28

contenu...

Corrigé de l'exercice 29

1. Modulo 3, par disjonction, nous formons le tableau des valeurs de $n^2 + 1$, ce qui donne

$n \equiv$	0	1	2	(mod3)
$n^2 + 1 \equiv$	1	2	2	(mod3)

Ce tableau prouve que, pour tout entier relatif n,

$$n^2 + 1 \equiv 1 (\bmod 3) \text{ ou } n^2 + 1 \equiv 2 (\bmod 3)$$

Il en résulte qu'il n'existe pas d'entiers relatifs n tel que

$$n^2 + 1 \equiv 0 (\bmod 3)$$

c'est-à-dire tel que

$$3 \text{ divise } n^2 + 1$$

2. Pour tout entier relatif n, nous posons $d = \operatorname{pgcd}\left(7n^2 + 4, n^2 + 1\right)$.

Nous avons

$$d \mid 7n^2 + 4 \text{ et } d \mid n^2 + 1$$

ce qui implique, par combinaison linéaire,

$$d \mid 7\left(n^2 + 1\right) - \left(7n^2 + 4\right), \text{ soit } d \mid 3$$

Puisque $d \geq 1$, nous en déduisons

$$d = 1 \text{ ou } d = 3$$

Si $d = 3$, alors $3 \mid n^2 + 1$, ce qui impossible d'après la première question. Nous en concluons

$$d = 1$$

ce qui signifie que les deux entiers $7n^2 + 4$ et $n^2 + 1$ sont premiers entre eux.

Corrigé de l'exercice 30

1. Nous posons $d = \operatorname{pgcd}(x, y)$. $\triangleright$Si $(x, y) \in \mathbb{Z}^2$ est une solution de (E), alors nous avons

$$x + y = 1 + d$$

Puisque $d \mid x$ et $d \mid y$, nous en déduisons par addition

$$d \mid x + y, \text{ c'est-à-dire } d \mid 1 + d.$$

De plus $d \mid d$, avec le Lemme d'Euclide, nous obtenons

$$d \mid 1 + d - d, \text{ soit } d \mid 1$$

ce qui implique, puisque $d \geq 1$,

$$d = \operatorname{pgcd}(x, y) = 1$$

$\triangleright$ Par conséquent, si $(x, y) \in \mathbb{Z}^2$ est une solution de (E), alors

$$x+y-1=1, \text{ soit } y=2-x$$

Par l'absurde, nous supposons que x est pair. Dans ce cas $y=2-x$ est également pair, ce qui est en contradiction avec x et y premiers entre eux.
Nous en concluons que x est impair. 2. De la question précédente, il résulte que si $(x,y)\in\mathbb{Z}^2$ est une solution de (E), alors

$$\left\{\begin{array}{l} x=2p+1 \\ y=2-(2p+1)=1-2p \end{array}\right., \text{ avec } p\in\mathbb{Z}$$

Réciproquement, si $x=2p+1$ et $y=1-2p$, avec $p\in\mathbb{Z}$, alors

$$x+y-1=2p+1+1-2p-1=1$$

De plus, puisque $y=2-x$, nous avons aussi,

$$y=x\times(-1)+2$$

ce qui justifie, sachant que x est un entiers impair,

$$\text{pgcd}(x,y)=\text{pgcd}(y,x)=\text{pgcd}(x,2)=1$$

Nous avons ainsi établi que le couple $(2p+1,1-2p)$, avec $p\in\mathbb{Z}$ est solution de (E).

Nous en concluons que l'ensemble des solutions de l'équation (E) est

$$S_{(E)}=\left\{(2p+1,1-2p)\in\mathbb{Z}^2/p\in\mathbb{Z}\right\}$$