Plab de travail

Vecteurs, droites et plans

7

Probabilités

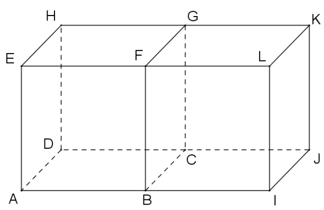
Vecteurs de l'espace

Exercice 1

On considère deux cubes $ABCDEFGH$ et $BIJCFLKG$ placés côte à côte.

Compléter les égalités de vecteurs suivantes :

- $\overrightarrow{FG} = \overrightarrow{A\ldots}$
- $\overrightarrow{EK} + \overrightarrow{LF} = \overrightarrow{B\ldots}$
- $\overrightarrow{AD} + 2\overrightarrow{HG} + \overrightarrow{GE} = \overrightarrow{F\ldots}$



Exercice 2

En utilisant la même figure, exprimer...

- ... le vecteur $\overrightarrow{AK}$ comme combinaison linéaire des vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{IK}$.
- ... le vecteur $\overrightarrow{AG}$ comme combinaison linéaire des vecteurs $\overrightarrow{AK}$ et $\overrightarrow{JD}$
- ... le vecteur $\overrightarrow{DL}$ comme combinaison linéaire des vecteurs $\overrightarrow{AI}$ et $\overrightarrow{JE}$
- ... le vecteur $\overrightarrow{BK}$ comme combinaison linéaire des vecteurs $\overrightarrow{AI}$, $\overrightarrow{EH}$ et $\overrightarrow{CG}$

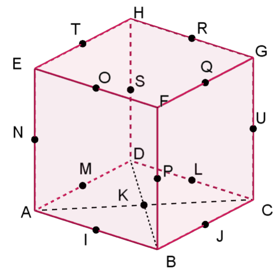
Exercice 3

Sur la même figure, où se trouve le point M tel que $\overrightarrow{BM} = \overrightarrow{ID} + \overrightarrow{CK}$?

Exercice 4

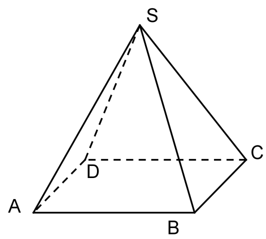
On considère un cube ABCDEFGH sur lequel on a placé les milieux des arêtes ainsi que le centre de la face ABCD. Donner...

- Un vecteur égal au vecteur $\overrightarrow{TR}$
- Un vecteur égal au vecteur $\overrightarrow{OJ}$
- Trois vecteurs colinéaires au vecteur $\overrightarrow{ML}$
- Deux vecteurs colinéaires à $\overrightarrow{DK}$
- Deux vecteurs coplanaires à $\overrightarrow{EF}$ et $\overrightarrow{AD}$



Exercice 5

On considère une pyramide $SABCD$ à base carrée $ABCD$ et de sommet S.

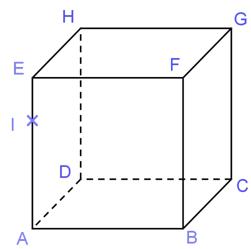


On considère les vecteurs :
$\vec{u} = \overrightarrow{AC} - \overrightarrow{SA}$, $\vec{v} = \overrightarrow{AB}$ et $\vec{w} = 2\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{DS}$.
Montrer que $\vec{u} = \vec{v} + \vec{w}$.

Droites et plans de l'espace

Exercice 6

On considère le cube $ABCDEFGH$ ci-contre, ainsi qu'un point I sur le segment $[AE]$.



Dans chacun des cas suivants, dire si les droites sont coplanaires ou non. Si oui, préciser si elles sont parallèles ou sécantes. Lorsqu'elles sont sécantes, construire le point d'intersection de ces droites.

(AB) et (FG)	(AF) et (IE)
(CD) et (EB)	(DI) et (EH)
(IB) et (FA)	(GF) et (DA)

Exercice 7

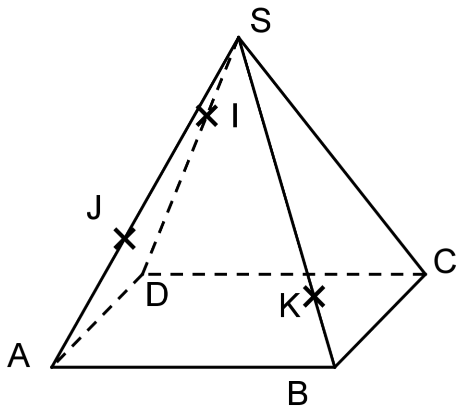
Sur le cube précédent, déterminer...

- ... l'intersection du plan (EFH) avec le plan (ADH).
- ... un plan parallèle au plan (BFG).
- ... l'intersection du plan (IFB) avec le plan (HDB).
- ... l'intersection du plan (GIC) avec le plan (HAD).
- ... un plan parallèle au plan (IEB)

Exercice 8

On considère une pyramide $SABCD$ de sommet S et de base carrée.

On place un point I sur $[DS]$, un point J sur $[AS]$ et un point K sur $[BS]$ de telle sorte que les droites (JK) et (AB) ne sont pas parallèles, de même que les droites (IK) et (BD).

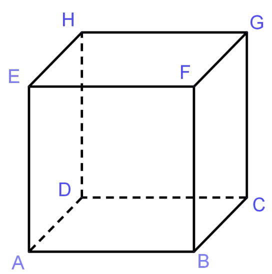


1) Justifier que les droites (IJ) et (AD) sont sécantes et construire leur point d'intersection.
2) Justifier que les droites (IK) et (BD) sont sécantes et construire leur point d'intersection.
3) Construire alors l'intersection des plans (ABD) et (IJK).
4) Sans justifier la construction, vérifier que l'intersection des droites (JK) et (BD) se trouve sur cette droite.

Repère de l'espace

Exercice 9

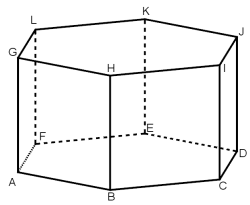
Dans le cube $ABCDEFGH$ ci-dessous, donner...



- ... les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{BH}$ dans le repère $(A;\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AD};\overrightarrow{AE})$.
- ... les coordonnées du point F dans le repère $(A;\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AD};\overrightarrow{AE})$.
- ... les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{CD}$ dans le repère $(A;\overrightarrow{AC};\overrightarrow{AG};\overrightarrow{AH})$.
- ... les coordonnées du point G dans le repère $(B;\overrightarrow{AC};\overrightarrow{AG};\overrightarrow{AH})$.
- ... les coordonnées du point I, milieu de $[BG]$ dans le repère $(A;\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AD};\overrightarrow{AE})$.
- ... les coordonnées du point J, milieu de $[FH]$ dans le repère $(A;\overrightarrow{AE};\overrightarrow{AD};\overrightarrow{AB})$.

Exercice 10

On considère un prisme droit $ABCDEFGHIJKL$ dont la base est un hexagone régulier $ABCDEF$.



1) On se place dans le repère $(A;\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AF},\overrightarrow{AG})$.
   a) Donner les coordonnées des points D, E, H et J dans ce repère.
   b) Donner les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{BK}$ et $\overrightarrow{GD}$ dans ce repère.
2) Reprendre les questions précédentes en se plaçant dans le repère $(A;\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AE},\overrightarrow{AH})$.

Exercice 11

On se place dans un repère de l'espace $(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$. On considère les points A, B, C et D de coordonnées respectives $A(1;-1;2)$, $B(5;1;8)$, $C(-3;2;-1)$ et $D(-1;3;2)$.

1) Déterminer les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{CD}$.
2) Que peut-on en déduire sur les droites (AB) et (CD) ?

Exercice 12

On se place dans un repère de l'espace $(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$. On considère les points A, B et C de coordonnées respectives $A(1\,;3\,;5)$, $B(2\,;7\,;-1)$ et $C(5\,;19\,;-19)$.

1) Déterminer les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$.
2) En déduire que les points A, B et C sont alignés.

Exercice 13

On se place dans un repère de l'espace $(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$.
On considère les points $A(1;2;3)$, $B(3;-1;2)$, $C(0;1;1)$ et $D(5;1;6)$.

1) Déterminer les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{AD}$.
2) Montrer que ces trois vecteurs sont coplanaires. Que peut-on en déduire pour les points A, B, C et D ?

Exercice 14

On se place dans un repère de l'espace $(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$. On considère les points A, B et C de coordonnées respectives $A(2;4;-1)$, $B(3;-2;5)$ et $C(6;7;-2)$.

1) Montrer que les points A, B et C ne sont pas alignés.
2) Déterminer les coordonnées du point I, milieu de $[BC]$.
3) Déterminer les coordonnées du point J tel que $\overrightarrow{AJ} = 2\overrightarrow{AB} - 3\overrightarrow{AC}$.
4) Déterminer les coordonnées du point K tel que C soit le milieu de $[AK]$.

Exercice 15

Soit les points A$(3;0;-1)$, B$(5;1;-2)$ et C$(-3;2;3)$.
Déterminer les coordonnées du point D tel que $ABCD$ soit un parallélogramme.

Exercice 16

Indiquer si les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ forment une base d'un plan en justifiant.

$$\vec{u}\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \vec{v}\begin{pmatrix}4\\5\\6\end{pmatrix}$$

Exercice 17

Démontrer que les vecteurs $\vec{u}, \vec{v}$ et $\vec{w}$ ne forment pas une base de l'espace.

$$\vec{u}\begin{pmatrix}0\\3\\2\end{pmatrix}, \quad \vec{v}\begin{pmatrix}3\\9\\18\end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \vec{w}\begin{pmatrix}1\\0\\4\end{pmatrix}$$

Exercice 18

Soit A$(-2;-14;-24)$, B$(-2;8;4)$, C$(-1;3;-7)$ et D$(-3;2;1)$.

1) Montrer que les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ ne sont pas colinéaires.
2) Démontrer que les points A, B, C et D sont coplanaires.

Exercice 19

Démontrer que les vecteurs $\vec{u}, \vec{v}$ et $\vec{w}$ forment une base de l'espace.

$$\vec{u}\begin{pmatrix}1\\0\\3\end{pmatrix}, \vec{v}\begin{pmatrix}2\\1\\0\end{pmatrix} \text{ et } \vec{w}\begin{pmatrix}0\\-4\\-2\end{pmatrix}$$

Exercice 20

Dans l'espace muni d'un repère, on donne les points suivants : $A(-1;0;3)$, $B(7;1;3)$, $C(3;-1;5)$ et $D(1;1;2)$.
Montrer que les droites (AB) et (CD) sont sécantes.

Exercice 21

On se place dans un repère de l'espace $(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$. On considère les points A, B, C, D et E de coordonnées respectives $A(2;2;0)$, $B(0;1;0)$, $C(1;0;1)$, $D(0;0;3)$ et $E(-1;4;0)$.

1) Calculer les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{AD}$ et $\overrightarrow{AE}$
2) Les vecteurs $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{AD}$ forment-ils une base de l'espace ?
3) Donner les coordonnées du point E dans le repère $(A;\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC},\overrightarrow{AD})$.

Représentations paramétriques de droite

Exercice 22

Donner une représentation paramétrique de la droite passant par le point $A(2;5;-3)$ et dirigée par $\vec{u}\begin{pmatrix}3\\2\\-3\end{pmatrix}$.

Exercice 23

On considère les points $A(1;3,-2)$ et $B(2;5;-4)$. Donner une représentation paramétrique de la droite (AB).

Exercice 24

On considère les points $A(1;2;7)$ et $B(3;-1;6)$ ainsi que la droite Δ admettant pour représentation paramétrique

$$\Delta : \begin{cases} x = 5 - 4t \\ y = 1 + 6t \\ z = -3 + 2t \end{cases}, t \in \mathbb{R}$$

1) Le point A appartient-il à la droite Δ ?
2) Les droites (AB) et Δ sont-elles parallèles ?

Exercice 25

On considère les droites (d_1) et (d_2) admettant pour représentations paramétriques :

$$(d_1) : \begin{cases} x = -5 + 2t \\ y = 11 - 3t \\ z = 11 - 2t \end{cases}, t \in \mathbb{R}$$

et

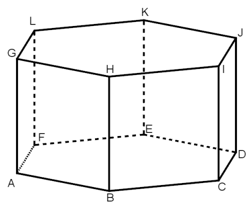
$$(d_2) : \begin{cases} x = 7 - 4t' \\ y = 1 - 2t' \\ z = -2 + 5t' \end{cases}, t' \in \mathbb{R}.$$

Montrer que les droites (d_1) et (d_2) sont sécantes en un point dont on donnera les coordonnées.

Synthèse

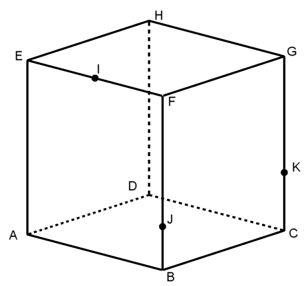
Exercice 26

On considère un prisme droit $ABCDEFGHIJKL$ dont la base est un hexagone régulier $ABCDEF$. Les droites (AI) et (BK) sont-elles sécantes ?



Exercice 27

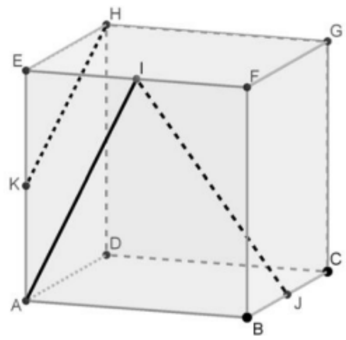
On se place dans un cube $ABCDEFGH$. On considère : - le point I, milieu de $[EF]$, - le point J tel que $\overrightarrow{BJ} = \frac{1}{4}\overrightarrow{BF}$, - le point K tel que $\overrightarrow{CK} = \frac{1}{3}\overrightarrow{CG}$.
L'espace est muni du repère $(A; \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AE})$.



1) Montrer que les droites (IJ) et (AB) sont sécantes. On note M leur point d'intersection.
2) A l'aide de deux autres droites sécantes, construire sur la figure ci-dessus, en justifiant, l'intersection des plans (ABC) et (IJK).
3) On considère le point L de coordonnées $\left(\frac{5}{9}; 1; 1\right)$.
   a) Sur quelle arête se situe le point L ?
   b) Montrer que les points I, J, K et L sont coplanaires.
   c) En déduire que les droites (IK) et (LJ) sont sécantes.
   d) Donner une équation paramétrique de ces deux droites et déterminer les coordonnées de leur point d'intersection.

Exercice 28 : Amérique du Nord 2021

On considère un cube $ABCDEFGH$. Le point I est le milieu du segment $[EF]$, le point J est le milieu du segment $[BC]$ et le point K est le milieu du segment $[AE]$.



1) Les droites (AI) et (KH) sont-elles parallèles ? Justifier votre réponse.

Dans la suite, on se place dans le repère orthonormé $(A; \overrightarrow{AB}; \overrightarrow{AD}; \overrightarrow{AE})$.

2) Donner les coordonnées des points I et J.
3) Montrer que les vecteurs $\overrightarrow{IJ}$, $\overrightarrow{AE}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont coplanaires.
4) Les droites (d_1) et (d_2) sont définies par les représentations paramétriques suivantes :

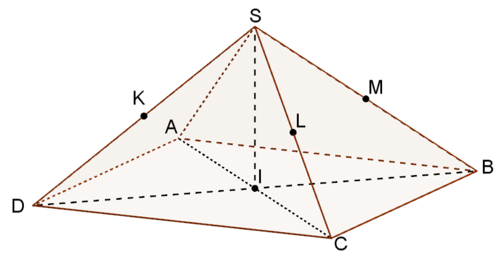
$$(d_1) : \begin{cases} x = 3 + t \\ y = 8 - 2t \\ z = -2 + 3t \end{cases}, t \in \mathbb{R},$$

$$(d_2) : \begin{cases} x = 4 + t \\ y = 1 + t \\ z = 8 + 2t \end{cases}, t \in \mathbb{R}.$$

Les droites (d_1) et (d_2) sont-elles parallèles ? Justifier votre réponse.

Exercice 29 : Métropole 2021

Cet exercice est un questionnaire à choix multiples. Pour chacune des questions suivantes, une seule des quatre propositions est exacte. Aucune justification n'est demandée.



$SABCD$ est une pyramide régulière à base carrée $ABCD$ dont toutes les arêtes ont la même longueur. Le point I est le centre du carré $ABCD$.
On suppose que $IC = IB = IS = 1$. Les points K, L et M sont les milieux respectifs des arêtes $[SD]$, $[SC]$ et $[SB]$.

1) Les droites suivantes ne sont pas coplanaires :
   a. (DK) et (SD) **b.** (AS) et (IC) **c.** (AC) et (SB) **d.** (LM) et (AD)
2) Les coordonnées du milieu N de $[KL]$ sont :
   a. $\left(\frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{2}\right)$ **b.** $\left(\frac{1}{4}, -\frac{1}{4}, \frac{1}{2}\right)$ **c.** $\left(-\frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{2}\right)$ **d.** $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, -1\right)$
3) Les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{AS}$ sont :
   a. $\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}$ **b.** $\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}$ **c.** $\begin{pmatrix}2\\1\\-1\end{pmatrix}$ **d.** $\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$
4) Une représentation paramétrique de la droite (AS) est, pour $t \in \mathbb{R}$:
   a. $\begin{cases} x = -1 - t \\ y = t \\ z = -t \end{cases}$ **b.** $\begin{cases} x = -1 + 2t \\ y = 0 \\ z = 1 + 2t \end{cases}$
   c. $\begin{cases} x = t \\ y = 0 \\ z = 1 + t \end{cases}$ **d.** $\begin{cases} x = -1 - t \\ y = 1 + t \\ z = 1 - t \end{cases}$

(Correction)

Corrigé de l'exercice 1

On a $\overrightarrow{FG}=\overrightarrow{AD}$, $\overrightarrow{EK}+\overrightarrow{LF}=\overrightarrow{BJ}$ et $\overrightarrow{AD}+2\overrightarrow{HG}+\overrightarrow{GE}=\overrightarrow{FL}$

Corrigé de l'exercice 2

On a $\overrightarrow{AK}=2\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{IK}$, $\overrightarrow{AG}=\overrightarrow{AK}+\frac{1}{2}\overrightarrow{JD}$, $\overrightarrow{DL}=2\overrightarrow{AI}+\overrightarrow{JE}$ et $\overrightarrow{BK}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AI}+\overrightarrow{EH}+\overrightarrow{CG}$

Corrigé de l'exercice 3

Le point M se trouve sur le point H.

Corrigé de l'exercice 4

On a $\overrightarrow{TR}=\overrightarrow{OQ}$, $\overrightarrow{OJ}=\overrightarrow{TL}$.

Les vecteurs $\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{JI}$ et $\overrightarrow{GE}$ sont colinéaires au vecteur $\overrightarrow{ML}$.

Les vecteurs $\overrightarrow{DB}$ et $\overrightarrow{HF}$ sont colinéaires au vecteur $\overrightarrow{DK}$.

Les vecteurs $\overrightarrow{EG}$ et $\overrightarrow{AK}$ sont coplanaires aux vecteurs $\overrightarrow{EF}$ et $\overrightarrow{AD}$.
En effet, $\overrightarrow{EG}=\overrightarrow{EF}+\overrightarrow{AD}$ et $\overrightarrow{AK}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AD}+\frac{1}{2}\overrightarrow{EF}$.

Corrigé de l'exercice 5

On utilise la relation de Chasles et le fait que $\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AD}$.

On a $\vec{v}+\vec{w}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{DS}=\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DS}=\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AS}=\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{SA}$.

Corrigé de l'exercice 6

[Voir l'énoncé]

- (AB) et (FG) sont non coplanaires
- (AF) et (IE) sont coplanaires et sécantes en A
- (CD) et (EB) sont non coplanaires
- (DI) et (EH) sont coplanaires et sécantes en J
- (IB) et (FA) sont coplanaires et sécantes en K
- (GF) et (DA) sont coplanaires et parallèles.

Corrigé de l'exercice 7

L'intersection du plan (EFH) avec le plan (ADH) est la droite (EH).

Le plan (AEH) est un plan parallèle au plan (BFG).

L'intersection du plan (IFB) avec le plan (HDB) est la droite (FB).

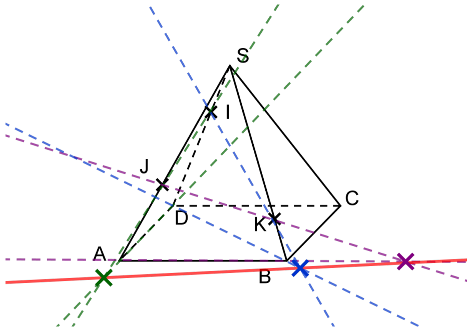
L'intersection du plan (GIC) avec le plan (HAD) est la droite (AE).

Le plan (HCG) est un plan parallèle au plan (IEB).

Corrigé de l'exercice 8

Les points I, J, A et D sont coplanaires (ils sont sur la face triangulaire de droite). Les droites (IJ) et (AD) sont donc coplanaires. Elles sont non parallèles et donc sécantes.

Les points I, K, B et D sont coplanaires (ils sont sur un triangle qui coupe le tétraèdre en deux). Les droites (IK) et (BD) sont donc coplanaires. Elles sont non parallèles et donc sécantes.



Corrigé de l'exercice 9

On a $\overrightarrow{BH}=-\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AE}$. Ses coordonnées dans le repère $(A;\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AD};\overrightarrow{AE})$ sont donc $\begin{pmatrix}-1\\1\\1\end{pmatrix}$.

Les coordonnées du point F dans le repère $(A;\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AD};\overrightarrow{AE})$ sont $(1\,;\,0\,;\,1)$.

On a $\overrightarrow{CD}=0\overrightarrow{AC}-1\overrightarrow{AG}+1\overrightarrow{AH}$. Ses coordonnées dans le repère $(A;\overrightarrow{AC};\overrightarrow{AG};\overrightarrow{AH})$ sont donc $\begin{pmatrix}0\\-1\\1\end{pmatrix}$.

Les coordonnées du point G dans le repère $(B;\overrightarrow{AC};\overrightarrow{AG};\overrightarrow{AH})$ sont $(0\,;\,0\,;\,1)$.

Les coordonnées du point I, milieu de $[BG]$ dans le repère $(A;\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AD};\overrightarrow{AE})$ sont $\left(1\,;\,\frac{1}{2}\,;\,\frac{1}{2}\right)$.

Les coordonnées du point J, milieu de $[FH]$ dans le repère $(A;\overrightarrow{AE};\overrightarrow{AD};\overrightarrow{AB})$ sont $\left(1\,;\,\frac{1}{2}\,;\,\frac{1}{2}\right)$. Attention à l'ordre des vecteurs !

Corrigé de l'exercice 10

Dans $(A;\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AF},\overrightarrow{AG})$, les coordonnées sont :

$$D(2;2;0),\quad E(1;2;0),\quad H(1;0;1),\quad J(2;2;1).$$

Les vecteurs :

$$\overrightarrow{BK}=\begin{pmatrix}0\\2\\1\end{pmatrix},\quad \overrightarrow{GD}=\begin{pmatrix}2\\2\\-1\end{pmatrix}.$$

Dans $(A;\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AE},\overrightarrow{AH})$, les coordonnées sont :

$$D(1;1;0),\quad E(0;1;0),\quad H(0;0;1),\quad J(0;1;1).$$

Les vecteurs :

$$\overrightarrow{BK}=\begin{pmatrix}-2\\1\\1\end{pmatrix},\quad \overrightarrow{GD}=\begin{pmatrix}2\\1\\-1\end{pmatrix}.$$

Corrigé de l'exercice 11

Les vecteurs :

$$\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 6 \end{pmatrix}, \quad \overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix} -4 \\ 3 \\ -3 \end{pmatrix}, \quad \overrightarrow{CD} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

On remarque que $\overrightarrow{AB} = 2 \cdot \overrightarrow{CD}$. Les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ sont colinéaires, donc les droites (AB) et (CD) sont parallèles.

Corrigé de l'exercice 12

Les vecteurs :

$$\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ -6 \end{pmatrix}, \quad \overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix} 4 \\ 16 \\ -24 \end{pmatrix}.$$

On observe que $\overrightarrow{AC} = 4 \cdot \overrightarrow{AB}$. Les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont colinéaires, et les trois points A, B, C appartiennent à la même droite. Donc, les points sont alignés.

Corrigé de l'exercice 13

Les vecteurs :

$$\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad \overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix}, \quad \overrightarrow{AD} = \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

En posant $\overrightarrow{AB} = \lambda\overrightarrow{AC} + \mu\overrightarrow{AD}$, nous trouvons $\lambda = 1$ et $\mu = -1$. Les trois vecteurs sont donc coplanaires, et les points A, B, C, D appartiennent au même plan.

Corrigé de l'exercice 14

Les vecteurs :

$$\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 1 \\ -6 \\ 6 \end{pmatrix}, \quad \overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Les vecteurs ne sont pas colinéaires, donc les points A, B, C ne sont pas alignés.

Le point I (milieu de $[BC]$) a pour coordonnées :

$$I = \left(\frac{3+6}{2}, \frac{-2+7}{2}, \frac{5+(-2)}{2}\right) = \left(\frac{9}{2}, \frac{5}{2}, \frac{3}{2}\right).$$

Le point J est donné par :

$$\overrightarrow{AJ} = \begin{pmatrix} 6 \\ -9 \\ 13 \end{pmatrix}, \quad J = A + \overrightarrow{AJ} = \begin{pmatrix} 8 \\ -5 \\ 12 \end{pmatrix}.$$

Le point K est donné par :

$$C = \frac{A+K}{2}, \quad K = 2C - A = \begin{pmatrix} 10 \\ 10 \\ -3 \end{pmatrix}.$$

Corrigé de l'exercice 21

$\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \overrightarrow{AC}\begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}, \overrightarrow{AD}\begin{pmatrix} -2 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AE}\begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$

... (détail complet des calculs pour la solution) ...

Corrigé de l'exercice 22

Cette droite admet pour représentation paramétrique $\begin{cases} x = 2 + 3t \\ y = 5 + 2t \\ z = -3 - 3t \end{cases}, t \in \mathbb{R}.$

Corrigé de l'exercice 23

On a $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}$. Une représentation paramétrique de (AB) est $\begin{cases} x = 1 + t \\ y = 3 + 2t \\ z = -2 - 2t \end{cases}, t \in \mathbb{R}.$

Corrigé de l'exercice 24

Le point A appartient à la droite Δ si et seulement s'il existe un réel t tel que

$$\begin{cases} 1 = 5 - 4t \\ 2 = 1 + 6t \\ 7 = -3 + 2t \end{cases}$$

- La première équation donne $t = 1$.
- Si $t = 1$, la deuxième équation donne $2 \neq 7$, ce qui est une contradiction.

Ainsi, le point A n'appartient pas à la droite Δ.

Un vecteur directeur de (AB) est $\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ -1 \end{pmatrix}$. Un vecteur directeur de Δ est $\vec{u} = \begin{pmatrix} -4 \\ 6 \\ 2 \end{pmatrix}$. On vérifie si $\vec{u}$ et $\overrightarrow{AB}$ sont colinéaires :

$$\frac{-4}{2} = -2, \quad \frac{6}{-3} = -2, \quad \frac{2}{-1} = -2.$$

Les rapports sont égaux : les vecteurs $\vec{u}$ et $\overrightarrow{AB}$ sont colinéaires. Conclusion : les droites (AB) et Δ sont parallèles.

Corrigé de l'exercice 25

Supposons que les droites (d_1) et (d_2) soient sécantes en un point $M(x, y, z)$. Il existe alors des réels t et t' tels que :

$$\begin{cases} x = -5 + 2t = 7 - 4t' \\ y = 11 - 3t = 1 - 2t' \\ z = 11 - 2t = -2 + 5t' \end{cases}$$

En utilisant la première équation :

$$-5 + 2t = 7 - 4t' \implies 2t + 4t' = 12 \implies t + 2t' = 6.$$

La deuxième équation devient :

$$11 - 3t = 1 - 2t' \implies 3t - 2t' = 10.$$

En résolvant le système :

$$\begin{cases} t + 2t' = 6 \\ 3t - 2t' = 10 \end{cases}$$

On additionne les deux équations :

$$4t = 16 \implies t = 4.$$

En remplaçant $t = 4$ dans $t + 2t' = 6$, on obtient :

$$4 + 2t' = 6 \implies t' = 1.$$

Vérifions les coordonnées obtenues :

$$x = -5+2\cdot4 = 3, \quad y = 11-3\cdot4 = -1, \quad z = 11-2\cdot4 = 3.$$

Pour $t' = 1$, on a :

$$x = 7-4\cdot1 = 3, \quad y = 1-2\cdot1 = -1, \quad z = -2+5\cdot1 = 3.$$

Les coordonnées de M sont $M(3,-1,3)$. Les droites (d_1) et (d_2) sont donc sécantes en ce point.

Corrigé de l'exercice 26

On se place dans le repère $(A; \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AF}, \overrightarrow{AG})$. Les coordonnées des points sont :

$$\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}, \quad \overrightarrow{AI}\begin{pmatrix}2\\1\\1\end{pmatrix}, \quad \overrightarrow{AK}\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix}.$$

Supposons qu'il existe deux réels λ et μ tels que :

$$\overrightarrow{AB} = \lambda\overrightarrow{AI} + \mu\overrightarrow{AK}.$$

En coordonnées :

$$\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2\lambda+\mu\\ \lambda+2\mu\\ \lambda+\mu\end{pmatrix}.$$

En résolvant : - La troisième ligne donne $\lambda + \mu = 0 \implies \lambda = -\mu$, - La deuxième ligne devient $-\mu + 2\mu = 0 \implies \mu = 0$, - Donc $\lambda = 0$.

Mais si $\lambda = 0$ et $\mu = 0$, la première ligne devient $1 = 0$, une contradiction.

Les vecteurs $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AI}$ et $\overrightarrow{AK}$ ne sont pas coplanaires, donc les droites (AI) et (BK) ne peuvent pas être sécantes.

Corrigé de l'exercice 27

1) Les droites (IJ) et (AB) sont coplanaires car I, J, A, B appartiennent à une même face. Le calcul montre qu'elles ne sont pas parallèles, donc elles sont sécantes. Le point M est leur intersection.
2) En considérant les droites (IK) et (CB) dans le plan (IJK), et (AB) dans le plan (ABC), on peut construire l'intersection des plans. Elle est donnée par la droite (MN), où N est l'intersection de (IK) et (CB).
3) a) Le point L se situe sur l'arête $[HG]$.
   b) Les points I, J, K, L sont coplanaires car leurs coordonnées vérifient une relation linéaire.
   c) Les droites (IK) et (LJ) sont coplanaires et non parallèles, donc elles sont sécantes.
   d) Résolvant les équations paramétriques des droites (IK) et (LJ), le point d'intersection est :

$$\left(\frac{13}{17}, \frac{9}{17}, \frac{11}{17}\right).$$

Corrigé de l'exercice 28

[Titre = Amérique du Nord 2021]

1) Les points A, I, K appartiennent au plan avant du cube. Le point H appartient au plan arrière. Les points A, I, K et H ne sont pas coplanaires, donc les droites (AI) et (KH) ne peuvent pas être parallèles.
2) Les coordonnées des points :

$$I\left(0; \frac{1}{2}; 1\right), \quad J\left(1; \frac{1}{2}; 0\right).$$

3) Les vecteurs :

$$\vec{IJ} = \begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}, \quad \overrightarrow{AE} = \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}, \quad \overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}.$$

Ces trois vecteurs sont coplanaires car le déterminant de la matrice formée par leurs coordonnées est nul :

$$\det\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\\ -1 & 1 & 1\end{pmatrix} = 0.$$

4) Les vecteurs directeurs des droites :

$$\vec{u_1} = \begin{pmatrix}1\\-2\\3\end{pmatrix}, \quad \vec{u_2} = \begin{pmatrix}1\\1\\2\end{pmatrix}.$$

Ces vecteurs ne sont pas colinéaires, donc les droites (d_1) et (d_2) ne sont pas parallèles.

Corrigé de l'exercice 29

[Titre=Métropole 2023]

1) Réponse **c.** : Les droites (AC) et (SB) ne sont pas coplanaires.
2) Réponse **a.** : Le milieu N de $[KL]$ a pour coordonnées $\left(\frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{2}\right)$.
3) Réponse **b.** : Les coordonnées de $\overrightarrow{AS}$ sont $\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}$.

4) Réponse **b.** : Une représentation paramétrique de (AS) est donnée par :

$$\left\{\begin{array}{l} x = -1 + 2t \\ y = 0 \\ z = 1 + 2t \end{array}\right., \; t \in \mathbb{R}.$$