Devoir surveillé 5 : Etude de fonctions

Nom : .... Prénom : .... Classe : T spé

– Calculatrice autorisée – 2 décembre 2024

Exercice 1 — 10 points

Soit f la fonction définie tout réel x, par

$$f(x) = (x+2)\mathrm{e}^{-x}.$$

On appelle $\mathcal{C}$ sa la courbe représentative.

(1,5) 1. Déterminer les limites de la fonction f en $-\infty$. et en $+\infty$.

(1) 2. Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$,
$$f'(x) = (-x-1)\mathrm{e}^{-x}.$$

(1,5) 3. Étudier le signe de $f'(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$ et dresser le tableau des variations de f sur $\mathbb{R}$. On calculera la valeur exacte de l'extremum de f sur $\mathbb{R}$.

(2) 4. Montrer que l'équation $f(x) = 1$ admet une solution unique α sur l'intervalle $[-1; 2]$. Donner une valeur approchée de α à 10^{-2} près.

5.
(1) (a) Calculer pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f''(x)$.
(1) (b) Peut-on affirmer que f est convexe sur l'intervalle $[0\,;\,+\infty[$?
(1) (c) Déterminer une équation de la tangente à la courbe $\mathcal{C}$ au point d'abscisse 2.
(1) (d) En déduire que pour tout $x \in [0; +\infty[$,

$$\mathrm{e}^{-x+2} \geqslant \frac{-3x+10}{x+2}.$$

Exercice 2 — 4 points

Pour chaque question, quatre affirmations sont proposées, une seule de ces affirmations est exacte.
Le candidat recopiera sur sa copie le numéro de chaque question et la lettre de la réponse choisie pour celle-ci.
AUCUNE JUSTIFICATION n'est demandée. Une réponse fausse ou l'absence de réponse n'enlève aucun point.

1. La courbe représentative de la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par

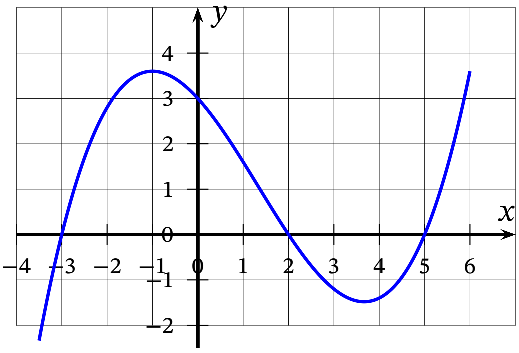
$$f(x) = \frac{-2x^2+3x-1}{x^2+1}$$

admet pour asymptote la droite d'équation :

A. $x = -2$; **B.** $y = -1$; **C.** $y = -2$; **D.** $y = 0$

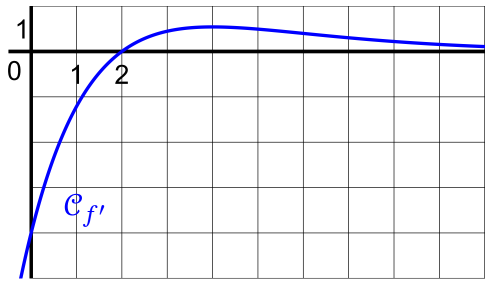
2. On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \dfrac{3}{5+\mathrm{e}^{x}}$.
Sa courbe représentative dans un repère admet :
A. une seule asymptote horizontale ;
B. une asymptote horizontale et une asymptote verticale ;
C. deux asymptotes horizontales.
D. aucune asymptote

3. On donne ci-dessous la courbe $\mathcal{C}_{f''}$ représentant la fonction dérivée seconde f'' d'une fonction f définie et deux fois dérivable sur l'intervalle $[-3,5\ ;\ 6]$.



A. La fonction f est convexe sur l'intervalle $[1\ ;\ 6]$.
B. La fonction f admet trois points d'inflexion.
C. La fonction dérivée f' de f est décroissante sur l'intervalle $[0\ ;\ 2]$.
D. La fonction dérivée f' change de signe en -1.

4. On donne ci-contre la représentation graphique de **la fonction dérivée** d'une fonction f :



On peut affirmer que la fonction f est :

A. concave sur $]0\ ;\ +\infty[$;
B. convexe sur $]0\ ;\ +\infty[$;
C. convexe sur [0 ; 2]
D. convexe sur $[2\ ;\ +\infty[$.

.

Exercice 3 **6 points**

Pour chacune des affirmations suivantes, indiquer si elle est vraie ou fausse. Justifier chaque réponse.

1. **Affirmation 1** : Pour tout réel x :

$$1-\frac{1-\mathrm{e}^x}{1+\mathrm{e}^x}=\frac{2}{1+\mathrm{e}^{-x}}.$$

2. On considère la fonction h définie sur $\mathbb{R}$ par

$$h(x)=\mathrm{e}^x\left(1-x^2\right).$$

Affirmation 2 : Dans le plan muni d'un repère orthonormé, la courbe représentative de la fonction h n'admet pas de point d'inflexion.

3. **Affirmation 3 :** L'équation $1-x+\mathrm{e}^{-x}=0$ admet une unique solution appartenant à $[0;2]$.

Corrigé de l'exercice 1
Soit $f(x) = (x+2)\mathrm{e}^{-x}$. On appelle $\mathcal{C}$ la courbe représentative de f.

1. Déterminer les limites de f en $-\infty$ et $+\infty$

En $+\infty$:

Soit $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = (x+2)\mathrm{e}^{-x} = x\mathrm{e}^{-x} + 2\mathrm{e}^{-x}$.

- Par le théorème des croissances comparées, $\lim\limits_{x\to+\infty} x\mathrm{e}^{-x} = 0$
- $\lim\limits_{x\to+\infty} 2\mathrm{e}^{-x} = 0$

Ainsi, par somme, $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$.

En $-\infty$:

- $\lim\limits_{x\to-\infty} -x = +\infty$ et $\lim\limits_{X\to+\infty} \mathrm{e}^{X} = +\infty$, donc par composition de fonctions $\lim\limits_{x\to-\infty} \mathrm{e}^{-x} = +\infty$
- $\lim\limits_{x\to-\infty} x+2 = -\infty$

Ainsi, par produit $\lim_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$.

2. Calcul de la dérivée $f'(x)$

La fonction $f(x)$ est définie par $f(x) = (x+2)\mathrm{e}^{-x}$.
En utilisant la formule $(uv)' = u'v + uv'$, avec $u(x) = x+2$ et $v(x) = \mathrm{e}^{-x}$, on a :

$$f'(x) = u'(x) \times v(x) + u(x) \times v'(x).$$

$$\begin{aligned} u(x) &= x+2, & u'(x) &= 1, \\ v(x) &= \mathrm{e}^{-x}, & v'(x) &= -\mathrm{e}^{-x}. \end{aligned}$$

Donc :

$$\begin{aligned} f'(x) &= u'(x) \times v(x) + u(x) \times v'(x) \\ &= 1 \times \mathrm{e}^{-x} + (x+2) \times (-\mathrm{e}^{-x}) \\ &= \mathrm{e}^{-x} - (x+2) \times \mathrm{e}^{-x}. \end{aligned}$$

En factorisant par e^{-x} :

$$f'(x) = (-x-1) \times \mathrm{e}^{-x}.$$

3. Étude du signe de $f'(x)$ et variations de f

Étude du signe de $f'(x)$:

$$f'(x) = (-x-1)\mathrm{e}^{-x}.$$

- Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\mathrm{e}^{-x} > 0$
- Le signe de $f'(x)$ dépend donc de $-x-1$:

$$-x-1 = 0 \iff x = -1.$$

- Pour $x < -1$, $-x-1 > 0$ donc $f'(x) > 0$ et pour $x > -1$, $-x-1 < 0$ donc $f'(x) < 0$.

Ainsi, $f'(x)$ change de signe en $x = -1$, où f admet un maximum local.

x	$-\infty$		-1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	e	$\searrow$	0

Calcul du maximum :

$$f(-1) = (-1+2)\mathrm{e}^1 = \mathrm{e}.$$

Le maximum est e atteint en $x = -1$.

4. Résolution de l'équation $f(x) = 1$

- La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme produit donc elle est continue sur $\mathbb{R}$.
- $f(-1) = (-1+2)\mathrm{e}^{-(-1)} = \mathrm{e}$, $\quad f(2) = (2+2)\mathrm{e}^{-2} = 4\mathrm{e}^{-2}$.
  On sait que : e $\approx 2,718$ et $4\mathrm{e}^{-2} \approx 0,541.$,
  Ainsi : $f(-1) > 1$ et $f(2) < 1$.
- La fonction f est strictement décroissante sur $[-1;2]$.

D'après le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires, il existe une unique solution $\alpha \in]-1;2[$ telle que $g(\alpha) = 1$. On trouve : $\alpha \approx 1,15$.

5.a. Calcul de la dérivée seconde $f''(x)$

La dérivée première a été calculée précédemment :

$$f'(x) = (-x-1)\mathrm{e}^{-x}.$$

Pour obtenir $f''(x)$, on dérive $f'(x)$ en appliquant la formule $(uv)' = u'v + uv'$, avec :

$$u(x) = -x-1, \qquad u'(x) = -1,$$
$$v(x) = \mathrm{e}^{-x}, \qquad v'(x) = -\mathrm{e}^{-x}.$$

En appliquant $(uv)' = u'v + uv'$, on obtient :

$$\begin{aligned} f''(x) &= u'(x) \times v(x) + u(x) \times v'(x) \\ &= (-1) \times \mathrm{e}^{-x} + (-x-1) \times (-\mathrm{e}^{-x}) \\ &= -\mathrm{e}^{-x} + (x+1) \times \mathrm{e}^{-x} \\ &= x \times \mathrm{e}^{-x} \end{aligned}$$

(b) Convexité sur $[0;+\infty[$:

Sur $[0;+\infty[$, $x > 0$ et $\mathrm{e}^{-x} > 0$.

Donc $f''(x) > 0$, ce qui prouve que f est convexe sur cet intervalle.

(c) Équation de la tangente en $x = 2$:

On sait qu'un équation de tangente au point d'abscisse $a \in \mathbb{R}$ à la courbe $\mathcal{C}_f$ est donnée par :

$$y = f'(a)(x - a) + f(a)$$

Ici, $a = 2$: $f(2) = 4\text{e}^{-2}, \quad f'(2) = -3\text{e}^{-2}$.
L'équation de la tangente est :

$$\begin{aligned} y &= -3\text{e}^{-2}(x-2) + 4\text{e}^{-2} \\ &= -3\text{e}^{-2}x + 10\text{e}^{-2} \\ &= (-3x + 10)\text{e}^{-2} \end{aligned}$$

(d) Inégalité :

Pour $x \in [0; +\infty[$, la tangente est en dessous de la courbe, donc :

$$\begin{aligned} & f(x) \geqslant y \\ \Longleftrightarrow\ & (x+2)\text{e}^{-x} \geqslant (-3x+10)\text{e}^{-2} \\ \Longleftrightarrow\ & \frac{\text{e}^{-x}}{\text{e}^{-2}} \geqslant \frac{-3x+10}{x+2} \quad \text{car } x + 2 > 0 \\ \Longleftrightarrow\ & \text{e}^{-x+2} \geqslant \frac{-3x+10}{x+2} \quad \text{car } x + 2 > 0 \end{aligned}$$

Corrigé de l'exercice 2

1. Soit f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \dfrac{-2x^2 + 3x - 1}{x^2 + 1}$.
   Pour $x \neq 0$, $f(x) = \dfrac{x^2\left(-2 + \dfrac{3}{x} - \dfrac{1}{x^2}\right)}{x^2\left(1 + \dfrac{1}{x^2}\right)} = \dfrac{-2 + \dfrac{3}{x} - \dfrac{1}{x^2}}{1 + \dfrac{1}{x^2}}$ donc $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = -2$.
   Donc la droite horizontale d'équation $y = -2$ est une asymptote à la courbe représentative de la fonction f.
   Réponse c

2. On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \dfrac{3}{5 + \text{e}^x}$.
   • On a $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = \dfrac{3}{5}$: la droite d'équation $y = \dfrac{3}{5}$ est asymptote horizontale au voisinage de moins l'infini ;
   • On a $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 0$: l'axe des abscisses est asymptote horizontale au voisinage de plus l'infini.
   Réponse c

3. La courbe représentative est celle de la fonction f'. Avec la précision permise par le graphique, on peut affirmer que la fonction f' est croissante sur $]-\infty\ ;\ 3]$ et décroissante sur $[3\ ;\ +\infty[$.
   $[0\ ;\ 2] \subset]-\infty\ ;\ 3]$, donc f' est croissante $[0\ ;\ 2]$.
   La fonction est donc convexe sur $[0\ ;\ 2]$.
   Réponse c

Corrigé de l'exercice 3

1. $\forall x \in \mathbb{R}$, $1 - \dfrac{1 - \text{e}^x}{1 + \text{e}^x} = \dfrac{1 + \text{e}^x}{1 + \text{e}^x} - \dfrac{1 - \text{e}^x}{1 + \text{e}^x} = \dfrac{2\text{e}^x}{1 + \text{e}^x} = \dfrac{2\text{e}^x}{\text{e}^x\left(1 + \dfrac{1}{\text{e}^x}\right)} = \dfrac{2}{1 + \dfrac{1}{\text{e}^x}} = \dfrac{2}{1 + \text{e}^{-x}}$

   Affirmation 1 : Vraie

2. La fonction h est continue et dérivable sur $\mathbb{R}$. Soit $\mathcal{C}_h$ sa courbe représentative.
$\forall x \in \mathbb{R}$, $h'(x) = \mathrm{e}^x \times (1 - x^2) + \mathrm{e}^x \times -2x = \mathrm{e}^x (1 - x^2 - 2x) = (-x^2 - 2x + 1)\ \mathrm{e}^x$.
La fonction h' est continue et dérivable sur $\mathbb{R}$.
$\forall x \in \mathbb{R}$, $h''(x) = (-2x-2)\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^x \times (-x^2 - 2x + 1) = \mathrm{e}^x (-2x - 2 - x^2 - 2x + 1) = (-x^2 - 4x - 1)\,\mathrm{e}^x$
Si $\mathcal{C}_h$ admet des points d'inflexions, alors $h''(x)$ peut s'annuler et changer de signe. Or $\mathrm{e}^x > 0$ pour tout réel x, donc étudions le signe de $-x^2 - 4x - 1$ sur $\mathbb{R}$.
$-x^2 - 4x - 1$ s'annule pour $x_1 = -2 - \sqrt{3}$ et pour $x_2 = -2 + \sqrt{3}$ car $\Delta = 12$.
Le trinôme du second degré s'annule donc deux fois et change donc aussi de signe.

Affirmation : Fausse

3. L'équation $1 - x + \mathrm{e}^{-x} = 0$ admet une unique solution dans l'intervalle $[0, 2]$.

Démonstration : Soit $f(x) = 1 - x + \mathrm{e}^{-x}$.
La dérivée de $f(x)$ est donnée par :

$$f'(x) = -1 - \mathrm{e}^{-x}.$$

Comme $f'(x)$ est strictement négative sur $[0, 2]$, la fonction f est strictement décroissante sur cet intervalle.

- La fonction f est dérivable sur $[0, 2]$, donc elle y est continue .
- En calculant les valeurs aux bornes de l'intervalle :

$$f(0) = 1 - 0 + \mathrm{e}^0 = 2 > 0,$$

$$f(2) = 1 - 2 + \mathrm{e}^{-2} = -1 + \mathrm{e}^{-2} < 0.$$

  Ainsi, $f(0) > 0$ et $f(2) < 0$.
- La fonction f est strictement décroissante sur $[0; 2]$,

Par le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires, il existe un unique $\alpha \in [0, 2]$ tel que $f(\alpha) = 0$.
Donc $f(x) = 0$ admet une unique solution dans $[0, 2]$.

L'équation $1 - x + \mathrm{e}^{-x} = 0$ admet une unique solution dans $[0, 2]$.

Affirmation : Fausse