Cours & méthodes

Droites, vecteurs et plans de l'espace

7
GEOMETRIE

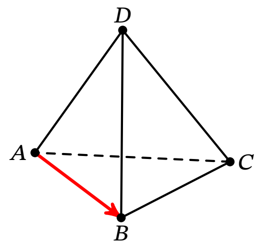
1 Vecteurs de l'espace

1.1 Translation et vecteurs

Définition 1

On étend à l'espace la notion de vecteur vue en géométrie plane.

- Soient A et B deux points de l'espace.
  On associe le vecteur $\overrightarrow{AB}$ à la translation qui transforme A en B.
- Le vecteur $\overrightarrow{AA}$ est appelé vecteur nul, on le note $\vec{0}$.



Propriété 1 : Rappels de seconde :

Deux vecteurs sont égaux s'ils ont même direction, même sens et même norme.

Propriété 2 : Égalité de deux vecteurs

- Lorsque la translation qui transforme A en B transforme égale C en D, on dit que les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ sont égaux.
- Dire que deux vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ sont égaux signifie que $ABDC$ est un parallélogramme (éventuellement aplati).
  Dans cas cas, $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ sont les représentants d'un même vecteur $\vec{u}$ et on note

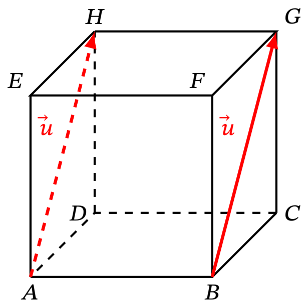
$$\vec{u} = \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$$

- Pour tout point A et pour tout vecteur $\vec{u}$, il existe un unique point M tel que $\vec{u} = \overrightarrow{AM}$.

Exemple 1

Dans le cube $ABCDEFGH$ ci-contre :

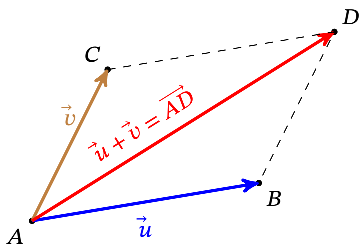
la translation qui transforme A en H, transforme B en G.
On a alors $\overrightarrow{AH} = \overrightarrow{BG} = \vec{u}$.



1.2 Opérations sur les vecteurs dans l'espace

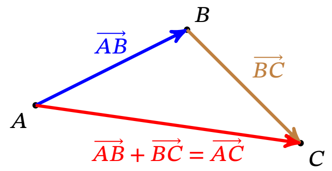
Propriété 3 : Règle du parallélogramme

Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs de l'espace de représentants respectifs $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$ et $\vec{v} = \overrightarrow{AC}$.
La somme des vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ est le vecteur noté $\vec{u}+\vec{v}$ de représentant $\overrightarrow{AD}$ tel que $ABDC$ soit un parallélogramme.



Propriété 4 : Relation de Chasles

Pour tous points A, B et C de l'espace, $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AC}$.



Remarque 1

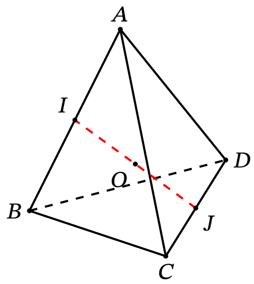
En particulier, $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BA}=\overrightarrow{AA}=\vec{0}$. On dit que $\overrightarrow{BA}$ est le vecteur **opposé** à $\overrightarrow{AB}$.

Méthode 1 : Calcul vectoriel de base

$ABCD$ est un tétraèdre,
I est le milieu de $[AB]$, J celui de $[CD]$ et O celui de $[IJ]$.

a) Démontrer que $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}=2\overrightarrow{OI}$ et $\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OD}=2\overrightarrow{OJ}$.

b) En déduire que $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OD}=\vec{0}$.



Correction

Définition 2 : Produit d'un vecteur par un réel

Soient A et B deux points de l'espace et soit k un nombre réel.
Le vecteur $\overrightarrow{AC}=k\overrightarrow{AB}$ est le vecteur défini par :

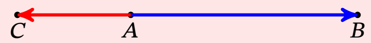
- Si $k>0$

C appartient à la demi droite $[AB)$ et $AC=kAB$

Ici, $\overrightarrow{AC}=3\overrightarrow{AB}$ et $AC=3\times AB$

- Si $k<0$

C appartient à la droite (AB) mais par à la demi-droite $[AB)$ et $AC=-kAB$



Ici, $\overrightarrow{AC}=-\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$ et $AC=\frac{1}{2}\times AB$

Définition 3 : Vecteurs colinéaires

Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ de l'espace.
On dit que $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont **colinéaires** s'il existe un réel k tel que $\vec{v}=k\vec{u}$ ou $\vec{u}=k\vec{v}$.

Remarque 2

- Le vecteur nul est colinéaire à tout vecteur $\vec{u}$ car $\vec{0}=0\,\vec{u}$.
- Deux vecteurs non nuls sont colinéaires si et seulement si, ils ont la même direction.

Propriété 5 : Propriétés des opérations

Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs de l'espace et soient k et k' deux réels.

- $k\vec{u}=\vec{0}$ si, et seulement si, $k=0$ ou $\vec{u}=\vec{0}$

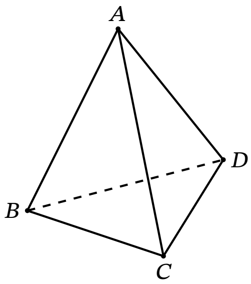
- $k(\vec{u}+\vec{v}) = k\vec{u}+k\vec{v}$
- $(k+k')\vec{u} = k\vec{u}+k'\vec{u}$
- $k(k'\vec{u}) = (kk')\vec{u}$

Méthode 2 : Vecteurs colinéaires

On considère un tétraèdre $ABCD$.

a) Construire les points M et N tels que : $\overrightarrow{BM} = \frac{1}{3}\overrightarrow{BA}$ et $\overrightarrow{CN} = 2\overrightarrow{BC}$.

b) Démontrer que les vecteurs $\overrightarrow{MC}$ et $\overrightarrow{AN}$ sont colinéaires.



Correction

Définition 4 : Combinaison linéaire

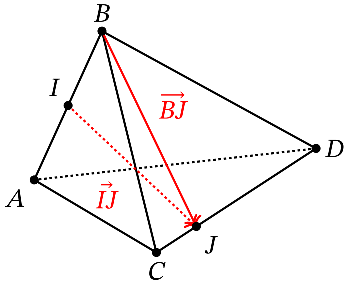
Soient $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{w}$ et $\vec{t}$ quatre vecteurs de l'espace.
On dit que $\vec{t}$ est une **combinaison linéaire** des vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ s'il existe trois réels α, β et γ tels que $\vec{t} = \alpha\vec{u}+\beta\vec{v}+\gamma\vec{w}$.

Méthode 3 : Combinaisons linéaires

On considère un tétraèdre $ABCD$. On appelle I le milieu de $[AB]$ et J un point de $[CD]$.

a) À l'aide des graduations régulières, exprimer $\overrightarrow{BJ}$ comme combinaison linéaire des vecteurs $\overrightarrow{BC}$ et $\overrightarrow{BD}$.

b) En déduire une expression de $\overrightarrow{IJ}$ comme combinaison linéaire des vecteurs $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{AD}$.



Correction

2 Droites et plans de l'espace

2.1 Règles d'incidence

Remarque 3

Les axiomes d'incidence de la géométrie dans l'espace sont des axiomes qui fournissent des relations entre les points, les droites et les plans de cette géométrie.

- Par deux points distincts de l'espace il passe une et une seule droite.
- Par trois points non alignés A, B et C passe un et un seul plan, noté (ABC).
- Si A et B sont deux points distincts d'un plan $\mathcal{P}$, alors la droite (AB) est incluse dans ce plan $\mathcal{P}$.
- Dans chaque plan de l'espace, toutes les règles de la géométrie planes s'appliquent.

2.2 Caractérisation vectorielle d'une droite

Propriété 6

Soient A et B deux points distincts de l'espace.

- La droite (AB) est l'ensemble des points M de l'espace tels que les vecteurs $\overrightarrow{AM}$ et $\overrightarrow{AB}$ sont colinéaires.
  Autrement dit, la droite (AB) est l'ensemble des points M tels que $\overrightarrow{AM} = k\overrightarrow{AB}$ avec $k \in \mathbb{R}$.
- On dit que $\overrightarrow{AB}$ est un **vecteur directeur** de la droite (AB) et que $(A\,;\overrightarrow{AB})$ est un repère de cette droite.

Méthode 4 : Démontrer qu'un point appartient à une droite

Soient M, N, P trois points de l'espace non alignés.
On considère les poins I et J tels que $\overrightarrow{MI} = \frac{1}{2}\overrightarrow{MN}$ et $\overrightarrow{NJ} = 3\overrightarrow{MP} - 2\overrightarrow{MN}$.
Faire une figure et démontrer que le point P appartient à la droite (IJ).

Correction

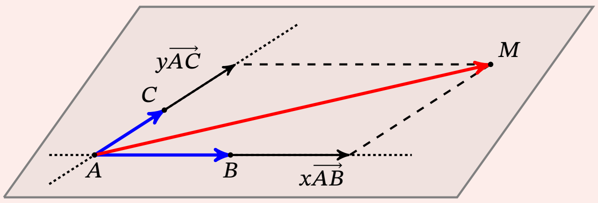
2.3 Caractérisation vectorielle d'un plan

Propriété 7

Soient A, B et C trois points non alignés de l'espace.

- Le plan (ABC) est l'ensemble des points M de l'espace tels que le vecteur $\overrightarrow{AM}$ est une combinaison linéaire des vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$.
  Autrement dit, le plan (ABC) est l'ensemble des points M tels que $\overrightarrow{AM} = x\overrightarrow{AB} + y\overrightarrow{AC}$ avec x et y réels.
- On dit que $(\overrightarrow{AB}\,;\overrightarrow{AC})$ est un couple de **vecteurs directeurs** du plan (ABC) et que $(A\,;\overrightarrow{AB}\,,\overrightarrow{AC})$ est un **repère** de ce plan.

Illustration 1



Remarque 4

De manière générale, un plan $\mathcal{P}$ peut être défini par un point A et deux vecteurs non colinéaires $\vec{u}$ et $\vec{v}$ comme l'ensemble des points M tels que le vecteur $\overrightarrow{AM}$ est une combinaison linéaire des vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$.
Dans ce cas, on dit que $\mathcal{P}$ est dirigé par le couple $(\vec{u}\,;\vec{v})$ et que $(A\,;\vec{u}\,,\vec{v})$ est un repère de ce plan.

Méthode 5 : Démontrer qu'un point appartient à un plan

Soit $ABCD$ un tétraèdre et soit M le point tel que $\overrightarrow{AM} = 3\overrightarrow{BM} + \overrightarrow{CM}$.
Démontrer que le point M appartient au plan (ABC).

Correction

2.4 Vecteurs coplanaires

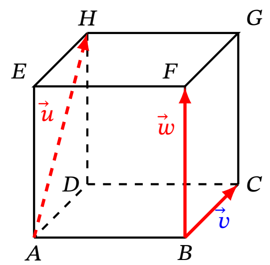
Définition 5

Soient $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ trois vecteurs de l'espace tels que $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$, $\vec{v} = \overrightarrow{AC}$, $\vec{w} = \overrightarrow{AD}$.
Dire que les vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ sont **coplanaires** signifie que les points A, B, C et D sont coplanaires (c'est-à-dire dans un même plan).

Méthode 6 : Démontrer que des vecteurs sont coplanaires

On considère le cube $ABCDEFGH$ ci-contre.

Démontrer que les vecteurs $\vec{u} = \overrightarrow{AH}$, $\vec{v} = \overrightarrow{BC}$ et $\vec{w} = \overrightarrow{BF}$ sont coplanaires.



Correction

Remarque 5

Si deux vecteurs parmi les trois vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ sont colinéaires, alors $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ sont coplanaires.

Propriété 8

Soient $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ trois vecteurs tels que $\vec{u}$ et $\vec{v}$ ne sont pas colinéaires.
Les vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ sont coplanaires si, et seulement si, $\vec{w}$ est une combinaison linéaire des vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$, c'est-à-dire s'il existe deux réels x et y tels que $\vec{w} = x\vec{u} + y\vec{v}$.

Remarque 6

Lorsque les vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ ne sont pas coplanaires, on dit qu'ils sont **linéairement indépendants** ou encore que la famille $(\vec{u}\,;\vec{v}\,;\vec{w})$ est une famille **libre**.

Méthode 7 : Démontrer que des vecteurs sont coplanaires

On considère le cube $ABCDEFGH$.
On appelle I le milieu de $[EB]$ et J le milieu de $[FG]$.
Démontrer que les vecteurs $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AH}$ et $\overrightarrow{IJ}$ sont coplanaires.

Correction

3 Positions relatives de droites et de plans

3.1 Positions relatives de deux droites

Définition 6

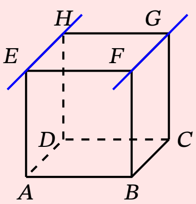
Deux droites de l'espace sont **coplanaires** si elles appartiennent à un même plan.

Propriété 9

Soient (d) une droite de vecteur directeur $\vec{u}$ et (d') une droite de vecteur directeur $\vec{u}'$.

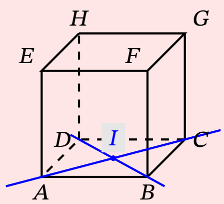
- Si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires alors (d) et (d') sont parallèles.
- Si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ ne sont pas colinéaires alors (d) et (d') sont sécantes lorsqu'elles ont un point en commun, non coplanaires sinon.

Droites coplanaires



Les droites (EH) et (FG) sont parallèles

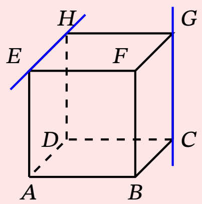
$\overrightarrow{EH}$ et $\overrightarrow{FG}$ sont colinéaires.



Les droites (AC) et (BD) sont sécantes en I.

$\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{BD}$ ne sont pas colinéaires.

Droites non coplanaires



Les droites (EH) et (GC) sont non coplanaires.

$\overrightarrow{EH}$ et $\overrightarrow{GC}$ ne sont pas colinéaires

Remarque 7

- Dans le plan, deux droites non parallèles sont sécantes.
- Dans l'espace, deux droites non coplanaires ne sont ni sécantes ni parallèles.

3.2 Positions relatives d'une droite et d'un plan

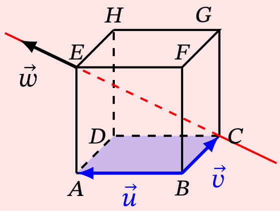
Définition 7

Dire qu'une droite (d) est parallèle à un plan $\mathcal{P}$ signifie que (d) est parallèle à une droite contenue dans le plan $\mathcal{P}$.

Propriété 10

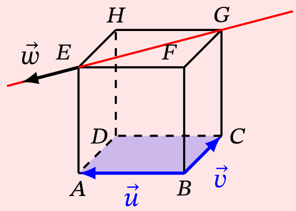
Soit $\mathcal{P}$ un plan de direction $(\vec{u}, \vec{v})$ et (d) une de droite de vecteur directeur $\vec{w}$.
La droite (d) est parallèle au plan $\mathcal{P}$ si, et seulement si, les vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ sont coplanaires.

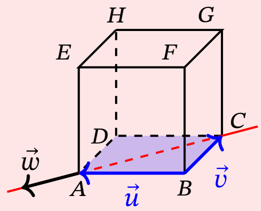
Droite et plan sécants



$\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ non coplanaires

Droite et plan parallèles





$\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ coplanaires

Méthode 8 : Démontrer que des vecteurs sont coplanaires

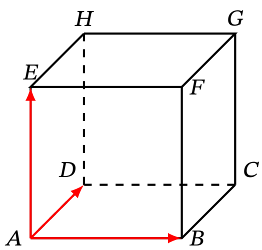
$ABCDEFGH$ est un cube. M, N, P et Q sont les points tels que $\overrightarrow{HQ} = \frac{1}{4}\overrightarrow{HG}$, $\overrightarrow{AN} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AE}$,
$\overrightarrow{DP} = \frac{1}{8}\overrightarrow{DC}$ et M est le milieu de $[AD]$.

a) Faire une figure.

b) Exprimer $\overrightarrow{EQ}$, $\overrightarrow{NP}$ et $\overrightarrow{NM}$ comme une combinaison linéaire de $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AD}$ et $\overrightarrow{AE}$.

c) Justifier que $\overrightarrow{EQ} = 2\overrightarrow{NP} - 2\overrightarrow{NM}$.

d) En déduire la position de la droite (EQ) par rapport au plan (MNP).



Correction

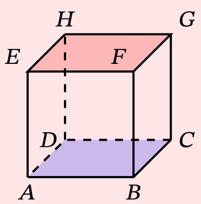
3.3 Positions relatives de deux plans

Définition 8

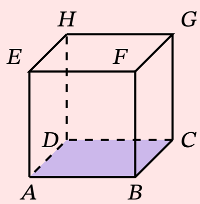
Deux plans sont parallèles lorsqu'ils admettent un même couple de vecteurs directeurs.

Propriété 11 : Positions relatives de deux plans

Plans parallèles

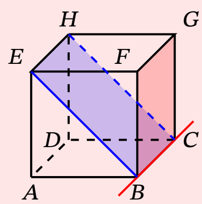


Les plans (ABC) et (EFG) sont strictement parallèles.



Les plans (ABC) et (ABD) sont confondus.

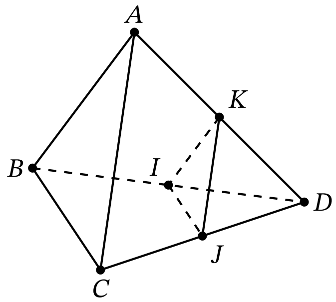
Plans sécants



Les plans (EBC) et (FBC) sont sécants selon la droite (BC).

Méthode 9 : Démontrer que des plans sont parallèles

$ABCD$ est un tétraèdre.
Les points I, J et K sont les milieux respectifs des segments $[BD]$, $[CD]$ et $[AD]$.
Justifier que les plans (IJK) et (ABC) sont parallèles.



Correction

4 Bases et repères de l'espace

4.1 Base de l'espace

Définition 9

Une **base de l'espace** est un triplet $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ formé de vecteurs non coplanaires.

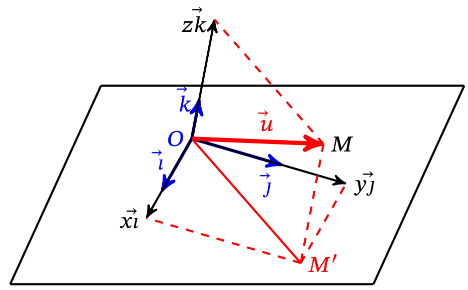
Remarque 8

Les vecteurs d'une base sont donc non nuls et non colinéaires deux à deux.

Propriété 12

Soit $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ une base de l'espace.
Pour tout vecteur $\vec{t}$, il existe un unique triplet $(x\,;y\,;z)$ de nombres réels tel que :

$$\vec{u} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$$



Définition 10

Le triplet (x, y, z) sont les **coordonnées** du vecteur $\vec{u}$ dans la base $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$. On les note $\vec{u}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$

Méthode 10 : Déterminer les coordonnées d'un vecteur dans une base.

On considère un cube $ABCDEFGH$.

a) Justifier que $(\overrightarrow{AB}\,;\overrightarrow{AC}\,;\overrightarrow{AE})$ est une base de l'espace.

b) Déterminer les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{AH}$ et $\overrightarrow{BH}$ dans la base $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\,; \overrightarrow{AE})$

Correction

4.2 Repère de l'espace

Définition 11

Un **repère de l'espace** est formé d'un point donné O et d'une base $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.
On note $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ un tel repère. O s'appelle l'**origine** du repère.

Définition 12

Soit $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ un repère de l'espace.

- Pour tout point M il existe un unique triplet $(x; y; z)$ de réels tel que $\overrightarrow{OM} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$.
- $(x; y; z)$ sont les **coordonnées** de M dans le repère $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.
  x est l'**abscisse** de M, y est l'**ordonnée** de M et z est sa **cote**. On note $M(x; y; z)$.

Remarque 9

Tous les résultats de géométrie plane s'étendent à l'espace par adjonction d'une troisième coordonnées :

Propriété 13

Soit $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ un repère de l'espace.

- Si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ ont pour coordonnées respectives $(x; y; z)$ et $(x'; y'; z')$ alors :
  - le vecteur $\vec{u} + \vec{v}$ a pour coordonnées $(x + x'; y + y'; z + z')$;
  - pour tout réel k, le vecteur $k\vec{u}$ a pour coordonnées $(kx; ky; kz)$;
  - $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires si, et seulement si, leurs coordonnées sont proportionnelles.
- Si A et B ont pour coordonnées respectives $(x_A; y_A; z_A)$ et $(x_B; y_B; z_B)$, alors :
  - Le vecteur $\overrightarrow{AB}$ a pour coordonnées $(x_B - x_A; y_B - y_A; z_B - z_A)$.
  - Le milieu I du segment $[AB]$ a pour coordonnées $\left(\frac{x_A + x_B}{2}; \frac{y_A + y_B}{2}; \frac{z_A + z_B}{2}\right)$.

Méthode 11 : Déterminer des coordonnées de vecteurs dans l'espace.

On considère le cube $ABCDEFGH$ de centre O.

a) Justifier que $\left(A; \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AE}\right)$ est un repère de l'espace.

b) Donner sans justifier les coordonnées des points A, B, D et E.

c) Déterminer les coordonnées des points C, F, G, H, O et P centre de la face $BCGF$.

d) Déterminer les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{GP}$ et $\vec{u} = -3\overrightarrow{BO} + \overrightarrow{GE}$.

Correction

Méthode 12 : Démontrer avec les coordonnées que des points sont coplanaires.

On considère le cube $ABCDEFGH$ de centre O. L'espace est muni d'un repère $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.
On considère les points $A(1; 0; 1)$, $B(2; 2; 4)$, $C(3; 0; 5)$ et $D(5; -4; 7)$.

a) Déterminer les coordonnées I du milieu de $[AB]$.

b) Vérifier que les points A, B et C déterminent un plan.

c) Démontrer que les points A, B, C et D sont coplanaires.

Correction

Méthode 13 : Démontrer avec les coordonnées que des vecteurs sont coplanaires.

Dans le repère $(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$,

On considère les vecteurs $\vec{u}\begin{pmatrix}0\\6\\3\end{pmatrix}$, $\vec{v}\begin{pmatrix}2\\4\\-7\end{pmatrix}$ et $\vec{w}\begin{pmatrix}-1\\1\\5\end{pmatrix}$.

Les vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ sont-ils coplanaires ?

Correction

5 Représentation paramétrique de droite

Définition 13 : Représentation paramétrique de la droite

L'espace est muni d'un repère $(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$.

Soit $A(x_A, y_A, z_A)$ un point de l'espace et $\vec{u}\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}$ un vecteur non nul de l'espace.

On note (d) la droite passant par le point A et dirigée par $\vec{u}$.
Un point $M(x, y, z)$ appartient à la droite (d) si et seulement s'il existe un réel t tel que

$$\begin{cases} x = x_A + ta \\ y = y_A + tb \\ z = z_A + tc \end{cases}$$

Démonstration

On appelle ce système **représentation paramétrique de la droite (d)**

Méthode 14 : Déterminer une représentation paramétrique d'une droite

Déterminer la représentation paramétrique de la droite passant par le point $A(2;1;3)$ et dirigée par le vecteur $\vec{u}\begin{pmatrix}1\\-3\\2\end{pmatrix}$

Correction

Méthode 15 : Déterminer une représentation paramétrique d'une droite

On considère la droite admettant pour représentation paramétrique

$$\begin{cases} x = 5 - 2t \\ y = 8 - 4t \\ z = 3 + t \end{cases}, t \in \mathbb{R}$$

1) Déterminer un point et un vecteur directeur de cette droite.
2) Le point de coordonnées $(1, 0, 5)$ appartient-il à la droite ?
3) Le point $B(-1; -4; 5)$ appartient-il à cette droite ?

Correction