Cours & méthodes

Dérivabilité et convexité

4 ANALYSE

1 Rappels sur la dérivation

1.1 Fonction dérivée

Définition 1

Soit f une fonction définie sur un intervalle I, $a \in I$ et h un réel non nul tel que $a+h \in I$.

- On dit que f est dérivable en a si le taux de variation $\dfrac{f(a+h)-f(a)}{h}$ admet une limite finie lorsque h tend vers 0. Cette limite est appelée *nombre dérivé de f en a* et est notée $f'(a)$.

$$f'(a) = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h)-f(a)}{h}$$

- On dit que f est dérivable sur I si f est dérivable en tout $a \in I$. On appelle alors *fonction dérivée* de f sur I la fonction

$$f' : \begin{cases} I & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & f'(x) \end{cases}$$

1.2 Dérivées usuelles

$f : x \mapsto$	Définie sur	Dérivable sur	$f' : x \mapsto$
$k \in \mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	0
$mx+p$, m et p réels	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	m
x^2	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	$2x$
x^n pour $n \in \mathbb{N}^*$	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	nx^{n-1}
$\dfrac{1}{x}$	$]-\infty;0[$ et $]0;+\infty[$	$]-\infty;0[$ et $]0;+\infty[$	$-\dfrac{1}{x^2}$
$\dfrac{1}{x^n}$ pour $n \in \mathbb{N}^*$	$]-\infty;0[$ et $]0;+\infty[$	$]-\infty;0[$ et $]0;+\infty[$	$-\dfrac{n}{x^{n+1}}$
$\sqrt{x}$	$[0;+\infty[$	$]0;+\infty[$	$\dfrac{1}{2\sqrt{x}}$
$\exp(ax+b)$, a et b réels	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	$a\exp(ax+b)$

1.3 Opérations sur les dérivées

Propriété 1

Soit I un intervalle, u et v deux fonctions dérivables sur I, k un réel. Alors les fonctions ku, $u+v$ et uv sont dérivables sur I. Si de plus, v ne s'annule pas sur I, alors la fonction $\dfrac{u}{v}$ est également dérivable sur I. On a alors

$$(k\,u)' = k\,u' \qquad (u+v)' = u' + v'$$

$$(uv)' = u'v + uv' \qquad \left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$$

Méthode 1 : Calculer une dérivée

Calculer la dérivée de la fonction $f : x \mapsto (x^2 - 3x + 1)\mathrm{e}^{3x+1}$, définie sur $\mathbb{R}$.

Correction

1.4 Tangente à la courbe

Définition 2 : Tangente à la courbe

Soit f une fonction dérivable en a. On note $\mathcal{C}_f$ la courbe de f dans un repère orthonormé $(O; \vec{i}; \vec{j})$.
La tangente à $\mathcal{C}_f$ au point d'abscisse a est la droite de coefficient directeur $f'(a)$ et passant par le point de coordonnée $(a; f(a))$.

Remarque 1

Soit f une fonction dérivable en a. La tangente à la courbe de f au point d'abscisse a a pour équation

$$y = f'(a) \times (x - a) + f(a)$$

Méthode 2 : Déterminer une équation de tangente

Pour tout réel x, posons $f(x) = \dfrac{x^2}{2} - 2x - 1$.
Déterminer une équation de la tangente à $\mathcal{C}_f$ au point d'abscisse 4

Correction

1.5 Variations d'une fonction

Propriété 2

Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I

- Si, pour tout $x \in I$, $f'(x) \geqslant 0$, alors f est croissante sur I
- Si, pour tout $x \in I$, $f'(x) \leqslant 0$, alors f est décroissante sur I
- Si, pour tout $x \in I$, $f'(x) = 0$, alors f est constante sur I

Méthode 3 : Calculer une dérivée

Étudier les variations de la fonction $f : x \mapsto (x^2 - 3x + 1)\mathrm{e}^{3x+1}$ étudiée précédemment.
On utilisera ce qu'on avait montré : Pour tout réel x, $f'(x) = x(3x - 7)\mathrm{e}^{3x+1}$.

Correction

2 Dérivée seconde

Définition 3 : Dérivée seconde

Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I telle que sa fonction dérivée f' est également dérivable sur I (on dit également que f est deux fois dérivable sur I).
On appelle fonction *dérivée seconde* de f la fonction dérivée de f'. Cette fonction est notée f''.

$$\text{Pour tout } x \in I,\ f''(x) = (f')'(x)$$

Méthode 4 : Calculer une dérivée seconde :

Pour tout réel x, on pose $f(x) = (2x + 1)e^{3x-2}$. Calculer la dérivée seconde de f.

Correction

.

3 Composition de fonctions

Définition 4 : Fonction composée

Soit I et J deux parties de $\mathbb{R}$.
Soit f une fonction définie sur J et g une fonction définie sur I telle que pour tout réel x, $g(x) \in J$.
On définit la *fonction composée* de f et g notée $f \circ g$ par

$$\text{Pour tout } x \in I,\ f \circ g(x) = f(g(x))$$

Remarque 2

L'idée derrière la composition de fonctions est simplement d'appliquer successivement plusieurs fonctions.

$$f \circ g \, : \, x \xmapsto{g} g(x) \xmapsto{f} f[g(x)]$$

Méthode 5 : Application de la définition :

Pour tout réel x, on note $f(x) = x^2$ et $g(x) = x + 3$.
Définir $f \circ g(x)$ et $g \circ f(x)$.

Correction

.

Remarque 3 : Attention !

En général, on n'a pas $f \circ g = g \circ f$! Ces deux fonctions ne sont d'ailleurs pas forcément définies sur le même ensemble.

Propriété 3

Soit I et J deux intervalles, f une fonction définie et dérivable sur J et g une fonction définie et dérivable sur I telle que pour tout $x \in I$, $g(x) \in J$. Alors $f \circ g$ est dérivable et pour tout réel x dans I,

$$(f \circ g)'(x) = g'(x) \times (f' \circ g)(x)$$

Méthode 6 : Application de la formule :

On considère la fonction f définie pour tout réel x par $f(x) = e^{x^2+3x-2}$.
Calculer la dérivée de f.

Correction

.

Remarque 4 : En pratique !

Soit u une fonction définie et dérivable sur un intervalle I

- Pour tout entier naturel n, u^n est dérivable sur I et $(u^n)' = nu'u^{n-1}$
- e^u est dérivable sur I et $(e^u)' = u' \times e^u$.
- Si pour tout réel $x \in I$, $u(x) > 0$, alors $\sqrt{u}$ est dérivable sur I et $(\sqrt{u})' = \dfrac{u'}{2\sqrt{u}}$
- Si pour tout réel x, $u(x) \neq 0$, $\dfrac{1}{u}$ est dérivable sur I et $\left(\dfrac{1}{u}\right) = -\dfrac{u'}{u^2}$.

Méthode 7 : Application de la formule :

On considère la fonction f définie pour tout réel x par $f(x) = (4x + 1)^9$.
Calculer la dérivée de f.

Correction

.

Méthode 8 : Application de la formule :

On considère la fonction f définie pour tout réel x par $f(x) = \dfrac{1}{x^2+1}$.
Calculer la dérivée de f.

Correction

.

Méthode 9 : Application de la formule :

On considère la fonction f définie pour tout réel $x \in [-2;2]$ par $f(x) = \sqrt{4-x^2}$.
Calculer la dérivée de f.

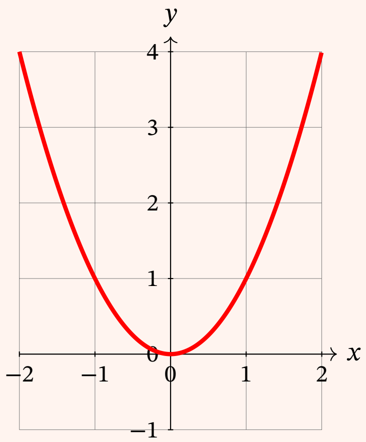
Correction

.

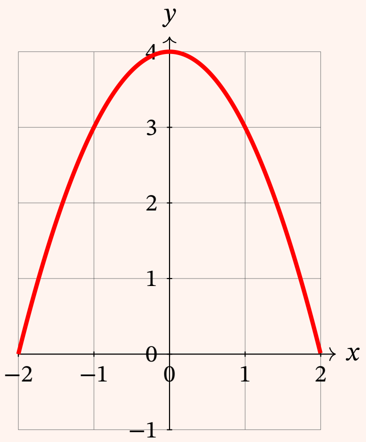
4 Découverte de la notion de convexité :

Introduction : Approche intuitive :

Quand on représente graphiquement une fonction, on peut observer sa **courbure**.
Plutôt *tournée vers le haut* ou *plutôt tournée vers le bas*



Courbure *tournée vers le haut*



Courbure *tournée vers le bas*

En Vidéo 1

Définition 5 : Définition intuitive :

On dira qu'une fonction dont la courbe est « *tournée vers le haut* »est **convexe** sur l'intervalle considéré, et qu'une fonction dont la courbe est « *tournée vers le bas* »est **concave** sur l'intervalle considéré.
On appelle **point d'inflexion** le point frontière entre deux parties où la convexité « *alterne* ».

Remarque 5 : Moyen mnémotechnique :

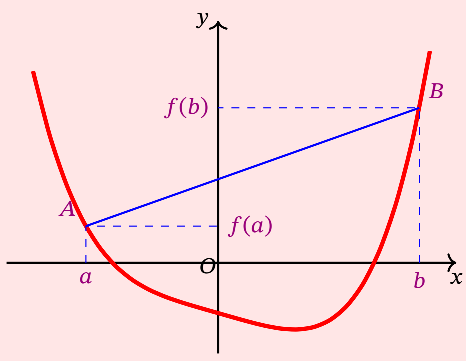
Quand la courbe est "*tournée vers le bas*", elle est *tournée vers la cave*. La fonction est donc **concave**.

4.1 Approche géométrique

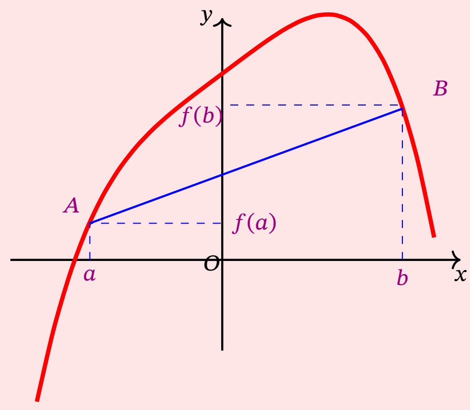
Propriété 4 : Propriétés graphiques des cordes

On observe que, quels que soient les points A et B de la courbe $\mathcal{C}_f$

Si le segment $[AB]$ est au-dessus de la courbe alors f est convexe.



Si le segment $[AB]$ est au-dessous de la courbe alors f est concave.



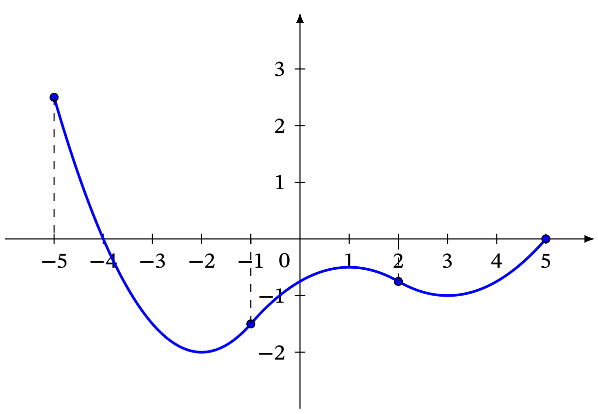
Définition 6 : Définition géométrique :

Soit f une fonction définie sur un intervalle I , $\mathcal{C}_f$ sa courbe représentative sur I, et deux points A et B appartenant à la courbe.

- Dire que la fonction f est **convexe** sur I signifie que tout segment $[AB]$ sera situé "*au dessus*" de $\mathcal{C}_f$.
- Dire que la fonction f est **concave** sur I signifie que tout segment $[AB]$ sera situé "*au dessous*" de $\mathcal{C}_f$.

Méthode 10 : Reconnaître graphiquement la convexité

Soit f une fonction définie sur $[-5\,;5]$ dont la courbe représentative $\mathcal{C}_f$ dans un repère orthogonal est donnée ci-contre.
Étudier graphiquement la convexité de f sur l'intervalle $[-5\,;5]$ et préciser si la courbe $\mathcal{C}_f$ admet un ou des points d'inflexion.

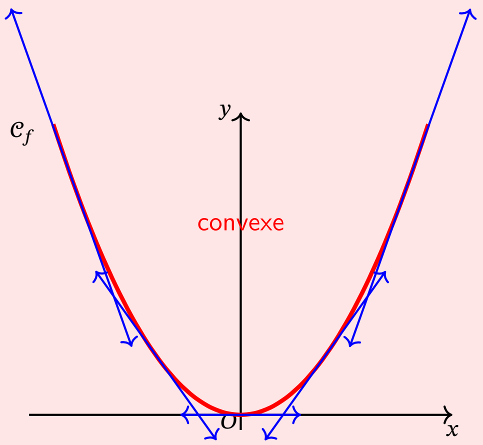


Approche graphique

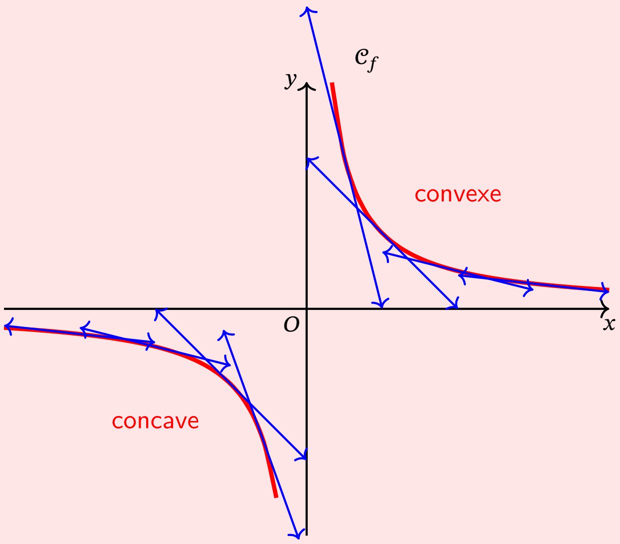
Propriété 5 : Propriété graphique des tangentes

Si on représente sur la représentation graphique d'une fonction dérivable sur un intervalle, les tangentes à la courbe, on observe que :

- Les tangentes "*portent*" la courbe quand la fonction est **convexe**.
- La courbe "*porte*" les tangentes quand la fonction est **concave**.



La fonction carré $x \longmapsto x^2$ est convexe sur $\mathbb{R}$.



La fonction inverse $x \longmapsto \dfrac{1}{x}$ est concave sur $]-\infty;0[$ et convexe sur $]0;+\infty[$

Propriété 6 : Propriété graphique :

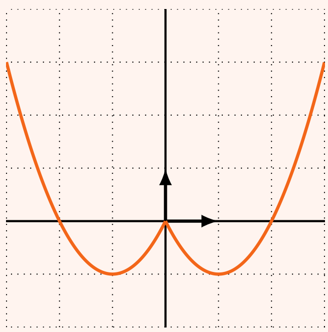
Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I et $\mathcal{C}_f$ sa courbe représentative.

- Si la fonction f est convexe sur I
  alors la courbe $\mathcal{C}_f$ est située entièrement au-dessus de chacune de ses tangentes.
- Si la fonction f est concave sur I
  alors la courbe $\mathcal{C}_f$ est située entièrement au-dessous de chacune de ses tangentes.

Démonstration importante

Remarque 6 : Attention

On parle bien de convexité sur un intervalle.
Ce n'est pas parce qu'une fonction f est convexe sur deux intervalles $[a,b]$ et $[b,c]$ que f est aussi convexe sur $[a,c]$



La fonction représentée ci-dessus est convexe sur $[-3;0]$ et sur $[0;3]$ mais n'est pas convexe sur $[-3,3]$.

5 Étude de la convexité

Propriété 7 : Convexité et dérivée

En Vidéo 2

Soit f une fonction définie et dérivable sur un intervalle I.

- f est convexe sur I si, et seulement si, sa fonction dérivée f' est croissante sur I.
- f est concave sur I si, et seulement si, sa fonction dérivée f' est décroissante sur I.

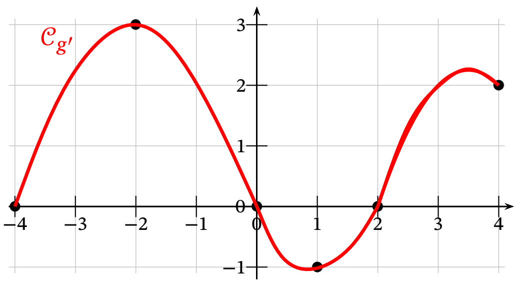
Remarque 7

Pour déterminer algébriquement si une fonction dérivable sur un intervalle est concave ou convexe, il suffit donc de déterminer le sens de variation de sa dérivée.
Comment étudier les variations d'une dérivée ? En étudiant le signe de la dérivée seconde !

Méthode 11 : QCM Bac

On suppose que g est une fonction dérivable sur l'intervalle $[-4\ ;\ 4]$. On donne ci-contre la représentation graphique de sa fonction dérivée g'.
On peut affirmer que :

1) g admet un maximum en -2.
2) g est croissante sur l'intervalle $[1\,;\,2]$.
3) g est convexe sur l'intervalle $[1\,;\,2]$.
4) g admet un minimum en 0.



Propriété 8 : Propriété fondamentale !

On note f'' la dérivée seconde de la fonction f, c'est à dire la dérivée de la dérivée f'.

- Si la dérivée seconde est positive alors la fonction f est convexe.
- Si la dérivée seconde est négative alors la fonction f est concave.

Démonstration

Méthode 12 : Etude de la convexité d'une fonction

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^5 - 5x^4$.
Étudier la convéxité de f sur $\mathbb{R}$.

Correction

6 Point d'inflexion

Propriété 9 : Conséquences pour les tangentes :

Soit f une fonction définie et dérivable sur un intervalle I et $\mathcal{C}_f$ sa courbe représentative.
S'il existe un point A de la courbe $\mathcal{C}_f$ tel que la courbe traverse sa tangente en ce point, alors on dit que A est un **point d'inflexion**.

Propriété 10 : Conséquences pour la dérivée seconde :

Soit f une fonction définie et dérivable sur un intervalle I et $\mathcal{C}_f$ sa courbe représentative.
S'il existe un réel $x_o \in I$ tel que :

- $f''(x_0) = 0$
- f change de signe en x_0.

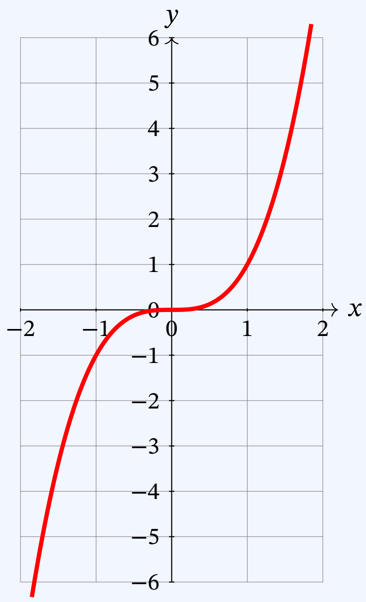
alors le point de coordonnées $A(x_0; f(x_0)$ de la courbe $\mathcal{C}_f$ est un **point d'inflexion.**

Exemple 1

La courbe représentative de la fonction cube
définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^3$ admet comme **point d'inflexion**
l'origine $\mathrm{O}(0; 0)$ du repère.
Soit $\mathcal{C}_f$ la courbe représentative de la fonction cube.
La tangente au point O à la courbe $\mathcal{C}_f$ est l'axe des abscisses d'équation $y = 0$.

- Pour $x \leqslant 0$, $f(x) \leqslant 0$
  donc la courbe $\mathcal{C}_f$ est au dessous de la tangente en O sur $]-\infty; 0]$.
- Pour $x \geqslant 0$, $f(x) \geqslant 0$
  donc la courbe $\mathcal{C}_f$ est au dessus de la tangente en O sur $[0; +\infty[$.

La courbe $\mathcal{C}_f$ traverse sa tangente en O donc $\mathrm{O}(0; 0)$ est un point d'inflexion.



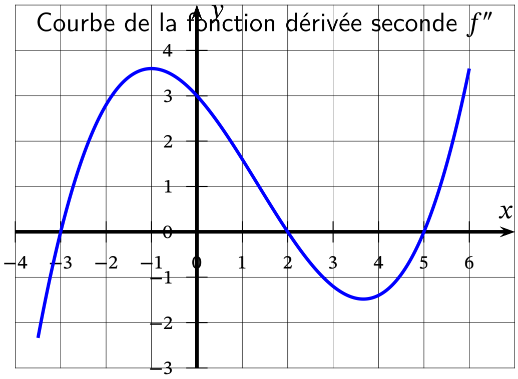
Méthode 13 : Comment caractériser un point d'inflexion ?

- Si la courbe traverse sa tangente en un point, cela signifie que la fonction change de convexité. Le point considéré est un point d'inflexion.
- Si la dérivée f'change de sens de variation en a, cela signifie que la fonction change de convexité. La courbe admet alors un point d'inflexion d'abscisse a.
- Si la dérivée seconde f''s'annule **en changeant de signe** en a cela signifie que la fonction change de convexité. La courbe admet alors un point d'inflexion d'abscisse a.

Étudier la convexité de la fonction f, définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^5 - 5x^4 - 40x + 120$.

Méthode 14 : QCM Bac Asie Juin 2021

On donne ci-dessous la courbe $\mathcal{C}_{f''}$ représentant la fonction dérivée seconde f'' d'une fonction f définie et deux fois dérivable sur l'intervalle $[-3,5\ ;\ 6]$.

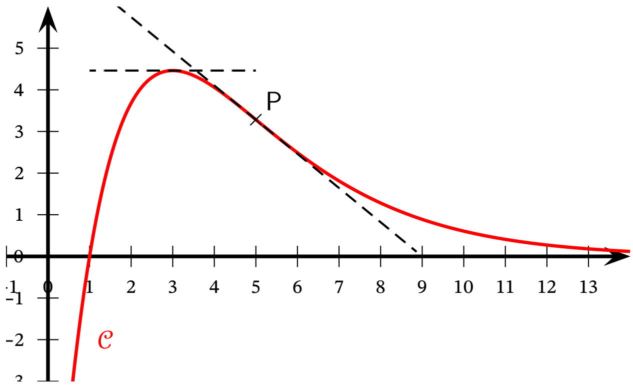


A. La fonction f est convexe sur l'intervalle $[-3\ ;\ 3]$.
B. La fonction f admet trois points d'inflexion.
C. La fonction dérivée f' de f est décroissante sur l'intervalle $[0\,;\ 2]$.

Méthode 15 : QCM Bac Centre étrangers Mars 2022

La courbe $\mathcal{C}$ ci-dessous représente une fonction f définie et deux fois dérivable sur $]0\ ;\ +\infty[$. On sait que :

- le maximum de la fonction f est atteint au point d'abscisse 3 ;
- le point P d'abscisse 5 est l'unique point d'inflexion de la courbe $\mathcal{C}$.



On a :

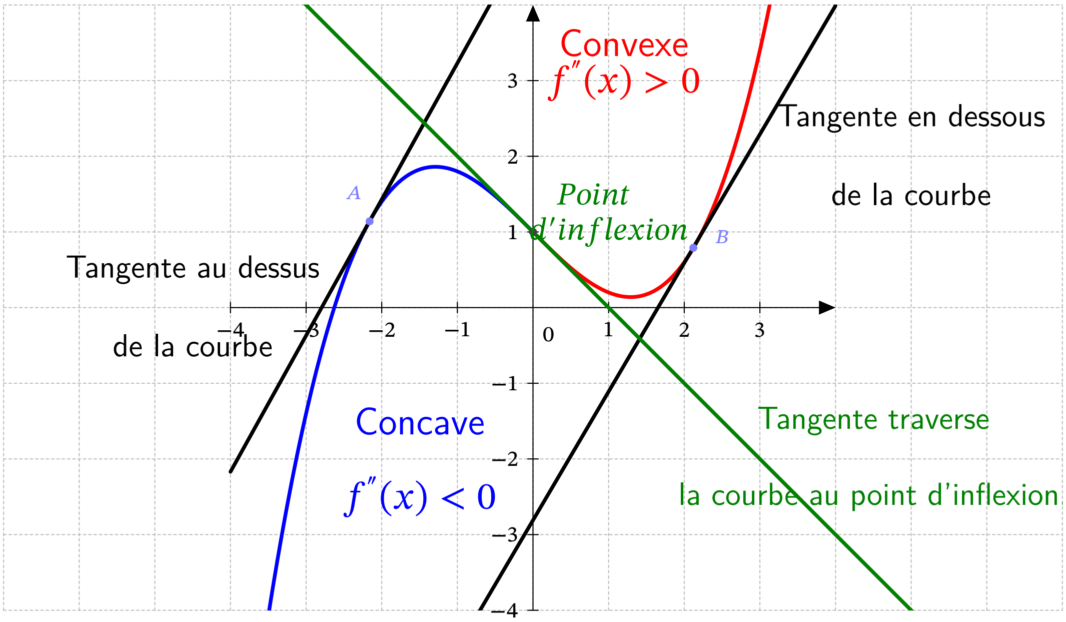
A. pour tout $x \in]0\ ;\ 5[$, $f(x)$ et $f'(x)$ sont de même signe ;

B. pour tout $x \in]5\ ;\ +\infty[$, $f(x)$ et $f'(x)$ sont de même signe ;

C. pour tout $x \in]0\ ;\ 5[$, $f'(x)$ et $f''(x)$ sont de même signe ;

D. pour tout $x \in]5\ ;\ +\infty[$, $f(x)$ et $f''(x)$ sont de même signe.

7 Bilan des propriétés



8 Inégalités de convexité

8.1 Inégalités de milieux

Propriété 11 : Inégalité du milieu pour une fonction convexe

Soit f une fonction convexe sur un intervalle I.

Pour tous réels a et b de I, $f\left(\frac{a+b}{2}\right) \leqslant \frac{f(a)+f(b)}{2}$

Démonstration 1

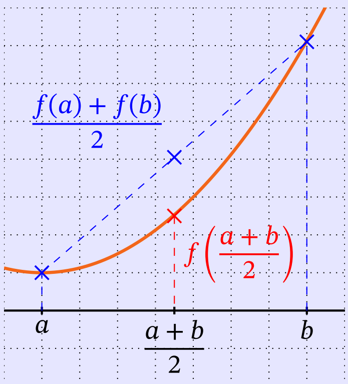
On considère les points $A(a, f(a))$ et $B(b, f(b))$.

Le milieu du segment $[AB]$ a pour coordonnées

$$\left(\left(\frac{a+b}{2}\right), \frac{f(a)+f(b)}{2}\right)$$

Or, la fonction f étant convexe sur I, le segment $[AB]$ se situe au-dessus de la courbe représentative de f. En particulier,

$$f\left(\frac{a+b}{2}\right) \leqslant \frac{f(a)+f(b)}{2}$$



Exemple 2

La fonction exponentielle est convexe sur $\mathbb{R}$. Pour tous réels a et b, $\exp\left(\frac{a+b}{2}\right) \leqslant \frac{e^a+e^b}{2}$

Propriété 12 : Inégalité du milieu pour une fonction concave

Soit f une fonction concave sur un intervalle I.

Pour tous réels a et b de I, $f\left(\frac{a+b}{2}\right) \geqslant \frac{f(a)+f(b)}{2}$

Exemple 3

La fonction $x \mapsto \sqrt{x}$ est concave sur $\mathbb{R}_+$.

Ainsi, pour tous réels a et b positifs, $\sqrt{\frac{a+b}{2}} \geqslant \frac{\sqrt{a}+\sqrt{b}}{2}$.

8.2 Inégalités avec les tangentes

La convexité des fonctions dérivables permet d'établir des inégalités en utilisant les équations des tangentes.

Exemple 4

Montrons que pour tout réel x, $e^x \geqslant x+1$.

La tangente à la courbe de la fonction exponentielle au point d'abscisse 0 a pour équation $y = \exp'(0)(x-0) + \exp(0)$, c'est-à-dire $y = x+1$. Puisque la fonction exp est convexe sur $\mathbb{R}$, la courbe de la fonction exponentielle est donc au-dessus de toutes ses tangentes et donc, en particulier, la tangente au point d'abscisse 0. On a donc, pour tout réel x, $e^x \geqslant x+1$.