DEVOIR SURVEILLÉ 3 : LIMITES DE FONCTIONS

Nom : .... Prénom : .... Classe : T spé

– Calculatrice autorisée –

19 octobre 2024

Exercice 1

5 points

On donne une fonction f définie sur un domaine D_f, dont on connaît le tableau de variations ci-joint :

x	$-\infty$		-4		0		4		$+\infty$
$f(x)$	4	↗	$+\infty$ ‖ $-\infty$	↗	4	↘	$-\infty$ ‖ $+\infty$	↘	-4

1. Déterminer le domaine de définition D_f.
2. Déterminer les limites de f aux bornes de son domaine de définition.
3. Déterminer les éventuelles asymptotes à la courbe représentative de f en précisant pour chacune leur équation.

Exercice 2

9 points

Déterminer, dans chacun des cas suivants, la limite de la fonction f aux bornes indiquées.

1. $\lim\limits_{x \to -\infty} \left(\dfrac{4x^2 - 5x + 1}{3 - x} \right)$.
2. $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(\dfrac{1}{1 + e^{-x}} \right)$.
3. $\lim\limits_{x \to -\infty} \left(e^{-x^3 + 7x - 3} \right)$.
4. $\lim\limits_{x \to -\infty} \left(\dfrac{3\sin(x) + 2\cos(x)}{x^3} \right)$
5. $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(x^3 e^{-x} - x \right)$
6. $\lim\limits_{x \to +\infty} \left((\cos(4x) - 3)x^3 \right)$

Exercice 3

6 points

Soit f la fonction définie sur $]-\infty; 7[\cup]7; +\infty[$ par

$$f(x) = \frac{4 - 3x}{x - 7}.$$

On note $\mathcal{C}_f$ sa courbe représentative.

1. Déterminer les limites de f aux bornes de son domaine de définition. et en déduire la présence d'éventuelles asymptotes à $\mathcal{C}_f$ dont on donnera leur équation.
2. Étudier la position relative de $\mathcal{C}_f$ par rapport aux asymptotes.

Corrigé de l'exercice 1

1. D'après le tableau de variations, on observe que la fonction est définie sur

$$D_f =]-\infty; -4[\cup]-4; 4[\cup]4; +\infty[.$$

2. Déterminons les limites aux bornes du domaine :
   - $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = 4$
   - $\lim\limits_{x\to-4^-} f(x) = +\infty$
   - $\lim\limits_{x\to-4^+} f(x) = -\infty$
   - $\lim\limits_{x\to4^-} f(x) = -\infty$
   - $\lim\limits_{x\to4^+} f(x) = +\infty$
   - $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = -4$
3. La courbe de f admet :
   - Une asymptote horizontale d'équation $y = 4$ en $-\infty$
   - Une asymptote verticale d'équation $x = 0$
   - Une asymptote horizontale d'équation $y = -4$ en $+\infty$

Corrigé de l'exercice 2

1. **Première démonstration :**

$$\lim_{x\to-\infty}\left(\frac{4x^2-5x+1}{3-x}\right) = \lim_{x\to-\infty}\left(\frac{x^2\left(4-\frac{5}{x}+\frac{1}{x^2}\right)}{x\left(-1+\frac{3}{x}\right)}\right)$$
$$= \lim_{x\to-\infty}\left(\frac{x\left(4-\frac{5}{x}+\frac{1}{x^2}\right)}{-1+\frac{3}{x}}\right)$$

   $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(4-\dfrac{5}{x}+\dfrac{1}{x^2}\right) = 4$ donc $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(x\left(4-\dfrac{5}{x}+\dfrac{1}{x^2}\right)\right) = -\infty$

   $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(-1+\dfrac{3}{x}\right) = -1$

   Donc la limite par quotient, $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\dfrac{4x^2-5x+1}{3-x}\right) = +\infty$

   Deuxième démonstration : La fonction étudiée étant une fonction rationnelle, quotient de deux polynômes, et la limite à étudier étant l'infini, on utilise la propriété du quotient des termes de plus haut degré ;

   $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\dfrac{4x^2-5x+1}{3-x}\right) = \lim\limits_{x\to-\infty}\left(\dfrac{4x^2}{-x}\right) = \lim\limits_{x\to-\infty}(-4x) = +\infty$
2. Pour $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{1}{1+\mathrm{e}^{-x}}\right)$:
   - $\lim\limits_{x\to+\infty} \mathrm{e}^{-x} = 0$
   - donc par somme, $\lim\limits_{x\to+\infty} 1+\mathrm{e}^{-x} = 1$

   donc par quotient, $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1}{1+\mathrm{e}^{-x}} = 1$
3. Pour $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\mathrm{e}^{-x^3+7x-3}\right)$:

- $\lim_{x\to-\infty}\left(-x^3+7x-3\right)=\lim_{x\to-\infty}\left(-x^3\right)=+\infty$ en utilisant la limite du terme de plus haut degré.
- $\lim_{y\to+\infty}(\mathrm{e}^y)=+\infty$
- Donc par composition de fonctions, $\mathrm{e}^{-x^3+7x-3}=+\infty$

- Pour $\lim_{x\to-\infty}\left(\dfrac{3\sin(x)+2\cos(x)}{x^3}\right)$:

  Soit $x\in\mathbb{R}_-^*$: (On cherche une limite en $-\infty$, on travaille donc avec des négatifs)

$$\begin{aligned} & -1\leqslant\cos(x)\leqslant 1 \\ \iff & -3\leqslant 3\cos(x)\leqslant 3 \end{aligned} \qquad\qquad \begin{aligned} & -1\leqslant\sin(x)\leqslant 1 \\ \iff & 2\leqslant 2\sin(x)\leqslant 2 \end{aligned}$$

  on a :

$$\begin{aligned} & -5\leqslant 3\cos(x)+2\sin(x)\leqslant 5 && \text{Par somme} \\ \iff & -\frac{5}{x^3}\geqslant\frac{3\cos(x)+2\sin(x)}{x^3}\geqslant\frac{5}{x^3} && \text{car } x^3<0 \end{aligned}$$

  $\lim_{x\to-\infty}\left(-\dfrac{5}{x^3}\right)=\lim_{x\to-\infty}\left(\dfrac{5}{x^3}\right)=0$

  Donc, d'après le théorème des gendarmes, $\lim_{x\to-\infty}\left(\dfrac{3\sin(x)+2\cos(x)}{x^3}\right)=0$

4. Pour $\lim_{x\to+\infty}\left(x^3e^{-x}-x\right)$:
   - $\lim_{x\to+\infty}\left(x^3e^{-x}\right)=0$ d'après les propriétés des croissances comparées, l'exponentielle l'emporte sur les polynômes en ∞.
   - Ainsi $\lim_{x\to+\infty}\left(x^3e^{-x}-x\right)=-\infty$

- Pour $\lim_{x\to+\infty}\left((\cos(4x)-3)x^3\right)$: Soit $x\in\mathbb{R}_+^*$: (On cherche une limite en $+\infty$, on travaille donc avec des positifs)

$$\begin{aligned} & -1\leqslant\cos(x)\leqslant 1 \\ \iff & -1\leqslant\cos(4x)\leqslant 1 \\ \iff & -4\leqslant\cos(4x)-3\leqslant -2 \\ \iff & -4\times x^3\leqslant(\cos(4x)-3)\times x^3\leqslant -2\times x^3 && \text{car } x^3>0 \end{aligned}$$

  On a montré que $(\cos(4x)-3)\times x^3\leqslant -2\times x^3$
  or $\lim_{x\to+\infty}\left(-2\times x^3\right)=-\infty$
  En application du théorème de comparaison, $\lim_{x\to+\infty}\left((\cos(4x)-3)x^3\right)=-\infty$

Corrigé de l'exercice 3

1. Étude des limites :
   - Pour $x\to-\infty$:

$$\begin{aligned} \lim_{x\to-\infty}f(x) &= \lim_{x\to-\infty}\frac{4-3x}{x-7} \\ &= \lim_{x\to-\infty}\frac{-3x}{x} \\ &= -3 \end{aligned}$$

• Pour $x \to 7^-$ et $x \to 7^+$:

$$\lim_{x\to 7^-} f(x) = \lim_{x\to 7^-} \frac{4-3x}{x-7} = \lim_{x\to 7^-} \frac{-17}{x-7} = +\infty$$
$$\lim_{x\to 7^+} f(x) = -\infty$$

• Pour $x \to +\infty$:

$$\lim_{x\to +\infty} f(x) = -3$$

La courbe $\mathcal{C}_f$ admet donc :

— Une asymptote horizontale d'équation $y = 3$ en $\pm\infty$

— Une asymptote verticale d'équation $x = 7$

2. Position relative par rapport aux asymptotes :

• Par rapport à l'asymptote horizontale $y = -3$:

On étudie le signe de $f(x) - (-3)$:

$$\begin{aligned} f(x) + 3 &= \frac{4-3x}{x-7} + 3 \\ &= \frac{4-3x+3x-21}{x-7} \\ &= \frac{-17}{x-7} \end{aligned}$$

Pour $x < 7$: le numérateur est négatif et le dénominateur aussi donc $f(x) + 3 > 0$.
La courbe est au-dessus de son asymptote horizontale.

Pour $x > 7$: le numérateur est négatif et le dénominateur est positif donc $f(x) + 3 < 0$.
La courbe est en dessous de son asymptote horizontale.