Parcours d'exercices

Limites de fonctions

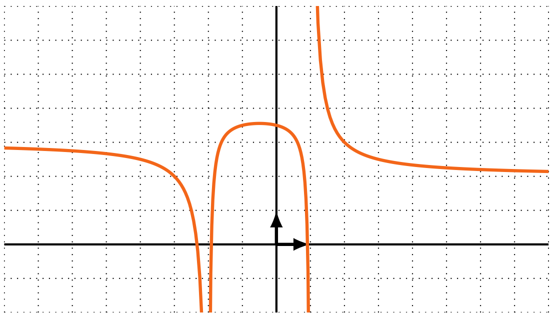
3

ANALYSE

Notion de limite

Exercice 1

On a représenté ci-dessous la courbe représentative $\mathcal{C}_f$ d'une fonction f dans un repère orthonormé.

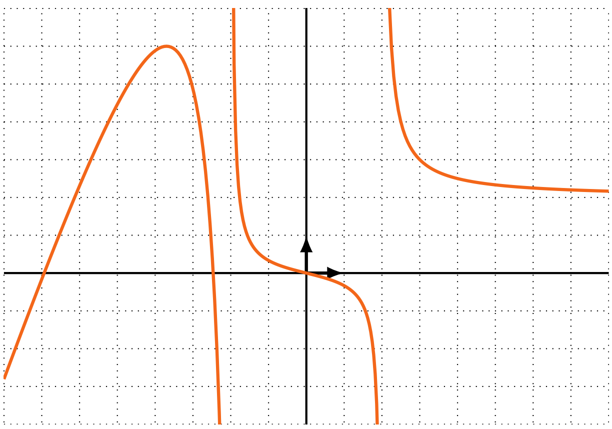


A l'aide de cette représentation graphique, déterminer $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x)$, $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x)$, $\lim\limits_{x\to(-2)^+} f(x)$, $\lim\limits_{x\to(-2)^-} f(x)$, $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$.

Quelles sont les asymptotes verticales ou horizontales à la courbe représentative de la fonction f ?

Exercice 2

On considère une fonction f dont la courbe représentative $\mathcal{C}_f$ est donnée ci-dessous.



Déterminer graphiquement les valeurs de $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$, $\lim\limits_{x\to(-2)^-} f(x)$, $\lim\limits_{x\to(-2)^+} f(x)$, $\lim\limits_{x\to 2^-} f(x)$, $\lim\limits_{x\to 2^+} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$

Quelles sont les asymptotes horizontales et verticales à la courbe $\mathcal{C}_f$?

Exercice 3

On considère une fonction f dont le tableau de variations est donné ci-dessous. On note $\mathcal{C}_f$ la courbe représentative de f dans un repère orthonormé.

x	$-\infty$		-4		2		5		7
f	2	↘	$-\infty$ ‖ $+\infty$	↘	-3	↗	$+\infty$ ‖ $+\infty$	↘	-3

1) Déterminer $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$, $\lim\limits_{x\to(-4)^-} f(x)$, $\lim\limits_{x\to(-4)^+} f(x)$, $\lim\limits_{x\to 5^-} f(x)$, $\lim\limits_{x\to 5^+} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$
2) Quelles sont les asymptotes horizontales et verticales à $\mathcal{C}_f$?
3) Dans un repère orthonormé, tracer une courbe d'une fonction compatible avec ce tableau de variations.

Exercice 4

Déterminer les limites suivantes

a. $\lim\limits_{x\to+\infty} (x^3+x-3)$

b. $\lim\limits_{x\to-\infty} (x^3+x-3)$

c. $\lim\limits_{x\to+\infty} (x^3+x^2-3)$

d. $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(\dfrac{1}{1+e^{-x}}\right)$

e. $\lim\limits_{x\to-\infty} \left(\dfrac{1}{1+e^{-x}}\right)$

f. $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(\dfrac{1}{e^{x}+e^{-x}}\right)$

g. $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(\dfrac{1}{x^3}+4\sqrt{x}\right)$

h. $\lim\limits_{x\to 0^+} \left(\dfrac{1}{x^3}+4\sqrt{x}\right)$

i. $\lim\limits_{x\to 1^+} \left(\dfrac{2x}{1-x}\right)$

j. $\lim\limits_{x\to 1^-} \left(\dfrac{2x}{1-x}\right)$

k. $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(\dfrac{2x}{1-x}\right)$

l. $\lim\limits_{x\to-\infty} \left(\dfrac{2x}{1-x}\right)$

m. $\lim\limits_{x\to+\infty} ((1-2x)e^{x})$

n. $\lim\limits_{x\to+\infty} (x^2-3x+1)$

o. $\lim\limits_{x\to-\infty} (x^2-3x+1)$

p. $\lim\limits_{x\to-\infty} \left(e^{-x^2+7x-3}\right)$

q. $\lim\limits_{x\to-\infty} \left(\exp\left(\dfrac{1-x^4}{2+x+x^3}\right)\right)$

r. $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(\exp\left(\dfrac{1-x^4}{2+x+x^3}\right)\right)$

Exercice 5

On considère la fonction $f : x \mapsto \dfrac{x^2-4x-12}{2x^2+x-3}$.

1) Déterminer le domaine de définition D de la fonction f.

2) Déterminer les limites de f en $-\infty$, $-\frac{3}{2}^+$, $-\frac{3}{2}^-$, 1^-, 1^+ et $+\infty$.
3) Justifier que f est dérivable sur D et exprimer $f'(x)$ pour tout réel x de D.
4) En déduire le tableau de variations de la fonction f sur D.
5) Tracer l'allure de la courbe de f dans un repère orthonormé.

Exercice 6

On considère la fonction $f : x \mapsto \dfrac{\sqrt{x^2 - 3x + 2}}{x+1}$.
1) Donner le domaine de définition de f.
2) Déterminer les limites éventuelles de f en $-\infty$, $+\infty$, -1^+ et -1^-.

Exercice 7

Une autre forme indéterminée...
1) Trouver trois réels a, b et c tels que, pour tout réel x, $2x^3 + 6x^2 - 9x + 1 = (x-1)(ax^2 + bx + c)$.
2) En déduire $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{2x^3 + 6x^2 - 9x + 1}{3x^2 - x - 2}$.

Exercice 8

On rappelle qu'une fonction f est dérivable en x si le taux de variation $\dfrac{f(x+h) - f(x)}{h}$ admet une limite finie lorsque h tend vers 0. Déterminer les limites suivantes :
1) Écrire le taux de variations de la fonction $f : x \mapsto e^x$ entre 0 et h.
2) Que vaut $f'(0)$? En déduire la valeur de $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^x - 1}{x}$.

Exercice 9

On considère la fonction $f : x \mapsto \dfrac{x^2 + 3x - 4}{2x+2}$.
1) Étudier la fonction f : variations, signe, limites.
2) Pour tout réel $x \neq -1$, on pose $g(x) = f(x) - \left(\frac{1}{2}x + 1\right)$.
   a) Montrer que, pour tout réel $x \neq 2$, $g(x) = -\dfrac{6}{2x+2}$.
   b) En déduire $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} g(x)$. On dit que la droite d'équation $y = \frac{1}{2}x + 1$ est une asymptote oblique à la courbe de f.
3) Dans un même repère orthonormé, tracer la droite d'équation $y = \frac{1}{2}x + 1$ et la courbe représentative de la fonction f.

Exercice 10

On considère la fonction f définie pour tout réel $x \neq 1$ par $f(x) = \dfrac{x^2}{x-1}$.
1) Déterminer trois réels a, b et c tels que, pour tout réel $x \neq 1$,
$$f(x) = ax + b + \frac{c}{x-1}.$$
2) En déduire que la courbe de f admet une asymptote oblique en $+\infty$ et en $-\infty$ dont on déterminera l'équation.

Exercice 11

On considère la fonction $f : x \mapsto \sqrt{x^2 - 3x + 2}$.
1) Donner le domaine de définition D de f.
2) Déterminer $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$.
3) Étudier les variations de f sur D.
4) Écrire le polynôme $x^2 - 3x + 2$ sous forme canonique.
5) En déduire que la droite d'équation $y = x - \frac{3}{2}$ est asymptote à la courbe de f en $+\infty$ et que la droite d'équation $y = \frac{3}{2} - x$ est asymptote à la courbe de f en $-\infty$.
6) Tracer l'allure de la courbe de f dans un repère orthonormé.

Exercice 12

Soit a et b deux réels. On considère une fonction f définie pour tout réel x sur $[0; +\infty[$ par
$$f(x) = \frac{a}{1 + e^{-bx}}.$$
La courbe C_f représentant la fonction f dans un repère orthogonal est donnée ci-dessous. Cette courbe passe par le point $A(0\,;\,0,5)$. La tangente à la courbe C_f au point A passe par le point $B(10\,;\,1)$.
1) Déterminer graphiquement $f(0)$ et $f'(0)$.
2) Justifier que $a = 1$.
3) On admet que la fonction f est dérivable sur $[0; +\infty[$ et on note f' sa fonction dérivée. Vérifier que pour tout réel $x \geq 0$,
$$f'(x) = \frac{be^{-bx}}{(1 + e^{-bx})^2}.$$
4) En utilisant les données de l'énoncé, déterminer b.

Partie B La proportion d'individus qui possèdent un certain type d'équipement dans une population est modélisée par la fonction p définie sur $[0; +\infty[$ par

$$p(x) = \frac{1}{1 + e^{-0,2x}}.$$

Le réel x représente le temps écoulé, en années, depuis le 1er janvier 2020. Le nombre $p(x)$ modélise la proportion d'individus équipés après x années.

1) Quelle est, pour ce modèle, la proportion d'individus équipés au 1er janvier 2030 ? On en donnera une valeur arrondie au centième.
2) a) Déterminer le sens de variations de la fonction p sur $[0; +\infty[$.
   b) Montrer que pour tout réel $x \geq 0$, $p(x) < 1$. En revenant au contexte étudié, ce résultat vous semble-t-il cohérent ?
   c) Déterminer $\lim\limits_{x \to +\infty} p(x)$. Interpréter ce résultat dans le contexte de l'exercice.

Exercice 13

On modélise la repousse de la queue d'un lézard par la fonction $f(x) = 10e^{u(x)}$, où $u(x) = -\exp\left(2 - \frac{x}{10}\right)$.

1) Vérifier que pour tout $x \geq 0$, $u'(x) = -\frac{1}{10}u(x)$. En déduire que $f'(x) = -u(x)e^{u(x)}$.
2) Calculer $f(20)$. En déduire une estimation de la longueur de la queue du lézard après 20 jours de repousse.
3) Déterminer $\lim\limits_{x \to +\infty} u(x)$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$. Selon ce modèle, la queue du lézard peut-elle mesurer 11 cm ?
4) Déterminer au bout de combien de jours la vitesse de croissance est maximale.

Exercice 14

Lorsque la queue d'un lézard des murailles casse, elle repousse toute seule en une soixantaine de jours.
Lors de la repousse, on modélise la longueur en centimètres de la queue du lézard en fonction du nombre de jours. Cette longueur est modélisée par la fonction f définie sur $[0; +\infty[$ par :

$$f(x) = 10e^{u(x)}$$

où u est la fonction définie sur $[0; +\infty[$ par :

$$u(x) = -\exp\left(2 - \frac{x}{10}\right)$$

où exp désigne la fonction exponentielle.
On admet que les fonctions u et f sont dérivables sur $[0; +\infty[$ et on note u' et f' leurs fonctions dérivées respectives.

1) a) Vérifier que pour tout réel x positif, on a

$$u'(x) = -\frac{1}{10}u(x).$$

   b) En déduire que pour tout réel positif x, on a

$$f'(x) = -u(x)e^{u(x)}.$$

   c) Quel est le sens de variation de la fonction f sur $[0\,; +\infty[$?
2) a) Calculer $f(20)$. En déduire une estimation, arrondie au millimètre, de la longueur de la queue du lézard après vingt jours de repousse.
   b) Déterminer $\lim\limits_{x \to +\infty} u(x)$ et en déduire $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$.
   c) Selon cette modélisation, la queue du lézard peut-elle mesurer 11 cm ?
3) On souhaite déterminer au bout de combien de jours la vitesse de croissance est maximale. On admet que la vitesse de croissance au bout de x jours est donnée par $f'(x)$. On admet que la fonction dérivée f' est dérivable sur $[0\,; +\infty[$, on note f'' la fonction dérivée de f' et on admet que, pour tout réel x positif :

$$f''(x) = \frac{1}{10}u(x)\,e^{u(x)}(1 + u(x)).$$

   a) Déterminer les variations de f' sur $[0\,; +\infty[$.
   b) En déduire au bout de combien de jours la vitesse de croissance de la longueur de la queue du lézard est maximale.

Exercice 15

Soit a et b deux réels. On considère une fonction f définie pour tout réel x sur $[0;+\infty[$ par

$$f(x) = \frac{a}{1+e^{-bx}}.$$

La courbe C_f représentant la fonction f dans un repère orthogonal est donnée ci-dessous. Cette courbe passe par le point $A(0\,;\,0,5)$. La tangente à la courbe C_f au point A passe par le point $B(10\,;\,1)$.

1) Déterminer graphiquement $f(0)$ et $f'(0)$.
2) Justifier que $a = 1$.
3) On admet que la fonction f est dérivable sur $[0;+\infty[$ et on note f' sa fonction dérivée. Vérifier que pour tout réel $x \geq 0$,

$$f'(x) = \frac{be^{-bx}}{(1+e^{-bx})^2}.$$

4) En utilisant les données de l'énoncé, déterminer b.

Partie B La proportion d'individus qui possèdent un certain type d'équipement dans une population est modélisée par la fonction p définie sur $[0;+\infty[$ par

$$p(x) = \frac{1}{1+e^{-0,2x}}.$$

Le réel x représente le temps écoulé, en années, depuis le 1er janvier 2020. Le nombre $p(x)$ modélise la proportion d'individus équipés après x années.

1) Quelle est, pour ce modèle, la proportion d'individus équipés au 1er janvier 2030 ? On en donnera une valeur arrondie au centième.
2) a) Déterminer le sens de variations de la fonction p sur $[0;+\infty[$.
   b) Montrer que pour tout réel $x \geq 0$, $p(x) < 1$. En revenant au contexte étudié, ce résultat vous semble-t-il cohérent ?
   c) Déterminer $\lim\limits_{x\to+\infty} p(x)$. Interpréter ce résultat dans le contexte de l'exercice.

(Correction)

Corrigé de l'exercice 1

D'après cette représentation graphique, $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x) = +\infty$, $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x) = -\infty$, $\lim\limits_{x\to(-2)^+} f(x) = -\infty$, $\lim\limits_{x\to(-2)^-} f(x) = -\infty$, $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 2$, $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = 3$.
De plus,

- La droite d'équation $x = 1$ est asymptote verticale à la courbe de f.
- La droite d'équation $x = -2$ est asymptote verticale à la courbe de f.
- La droite d'équation $y = 2$ est asymptote horizontale à la courbe de f en $+\infty$.
- La droite d'équation $y = 3$ est asymptote horizontale à la courbe de f en $-\infty$.

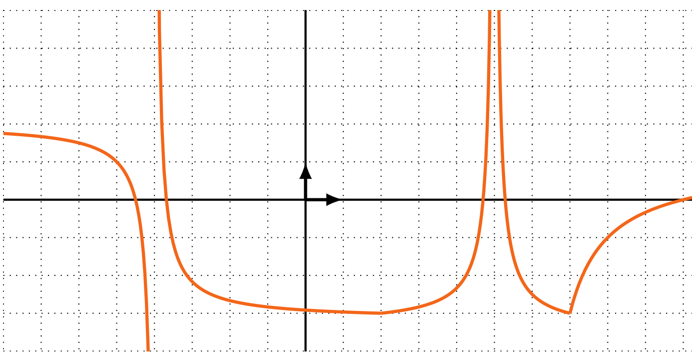
Corrigé de l'exercice 2

$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$, $\lim\limits_{x\to(-2)^-} f(x) = -\infty$, $\lim\limits_{x\to(-2)^+} f(x) = +\infty$, $\lim\limits_{x\to 2^-} f(x) = -\infty$, $\lim\limits_{x\to 2^+} f(x) = +\infty$, $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 2$
Par ailleurs,

- La droite d'équation $x = 2$ est une asymptote verticale à la courbe de f.
- La droite d'équation $x = -2$ est asymptote verticale à la courbe de f.
- La droite d'équation $y = 2$ est asymptote horizontale à la courbe de f en $+\infty$.

Corrigé de l'exercice 3

$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = 2$, $\lim\limits_{x\to(-4)^-} f(x) = -\infty$, $\lim\limits_{x\to(-4)^+} f(x) = +\infty$, $\lim\limits_{x\to 5^-} f(x) = +\infty$, $\lim\limits_{x\to 5^+} f(x) = +\infty$, $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 1$
Les droites d'équation $x = -4$ et $x = 5$ sont asymptotes verticales à la courbe de f. La droite d'équation $y = 2$ en est une asymptote horizontale en $-\infty$ et la droite d'équation $y = 1$ l'est en $+\infty$.



Corrigé de l'exercice 4

a. Puisque $\lim\limits_{x\to+\infty} x^3 = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} x = +\infty$, on a $\lim\limits_{x\to+\infty} (x^3 + x - 3) = +\infty$

b. Puisque $lim_{x\to-\infty} x^3 = -\infty$ et $lim_{x\to-\infty} x = -\infty$, on a $lim_{x\to-\infty}(x^3 + x - 3) = -\infty$

c. Puisque $\lim\limits_{x\to+\infty} x^3 = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} x^2 = +\infty$, on a alors $\lim\limits_{x\to+\infty} (x^3 + x^2 - 3) = +\infty$

d. On a $\lim\limits_{x\to+\infty} e^{-x} = 0$. Ainsi, $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(\dfrac{1}{1+e^{-x}}\right) = 1$.

e. On a que $\lim\limits_{x\to-\infty} e^{-x} = +\infty$. Ainsi, $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(\dfrac{1}{1+e^{-x}}\right) = 0$.

f. On a que $\lim\limits_{x\to+\infty} e^{-x} = 0$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} e^{x} = +\infty$. Ainsi, $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(\dfrac{1}{e^x+e^{-x}}\right) = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(\dfrac{1}{e^x+e^{-x}}\right) = 0$

g. $\lim\limits_{x\to0+} \dfrac{1}{x^3} = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to0+} \sqrt{x} = 0$. Ainsi, $\lim\limits_{x\to0+} \left(\dfrac{1}{x^3} + 4\sqrt{x}\right) = +\infty$

h. $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1}{x^3} = 0$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} \sqrt{x} = +\infty$. Ainsi, $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(\dfrac{1}{x^3} + 4\sqrt{x}\right) = +\infty$

i. $\lim\limits_{x\to1^+} (1-x) = 0^-$. Ainsi, $\lim\limits_{x\to1^+} \left(\dfrac{2x}{1-x}\right) = -\infty$

j. $\lim\limits_{x\to1^-} f(x) = 0^+$. Ainsi, $\lim\limits_{x\to1^-} \left(\dfrac{2x}{1-x}\right) = +\infty$

k. Pour tout réel $x \neq 1$ et $x \neq 0$, $f(x) = \dfrac{2}{\dfrac{1}{x} - 1}$. Ainsi, $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(\dfrac{2x}{1-x}\right) = -2$

l. Le même raisonnement permet d'établir que $\lim\limits_{x\to-\infty} \left(\dfrac{2x}{1-x}\right) = -2$

m. $\lim\limits_{x\to+\infty} (1-2x) = -\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} e^x = +\infty$. Ainsi, $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$

n. Pour tout réel $x \neq 0$, $f(x) = x^2\left(1 - \dfrac{3}{x} + \dfrac{1}{x^2}\right)$. Ainsi, $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(x^2 - 3x + 1\right) = +\infty$

o. On a $\lim\limits_{x\to-\infty} x^2 = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} (-3x) = +\infty$. Par somme, $\lim\limits_{x\to-\infty} \left(x^2 - 3x + 1\right) = +\infty$.

p. On a $\lim\limits_{x\to-\infty} (-x^2+7x-3) = -\infty$ et $lim_{X\to-\infty} e^X = 0$. Ainsi, $\lim\limits_{x\to-\infty} \left(e^{-x^2+7x-3}\right) = 0$

q. Pour tout réel non nul x,

$$\frac{1-x^4}{2+x+x^3} = \frac{x^4\left(\frac{1}{x^4} - 1\right)}{x^3\left(\frac{2}{x^3} + \frac{1}{x^2} + 1\right)} = x \times \frac{\frac{1}{x^4} - 1}{\frac{2}{x^3} + \frac{1}{x^2} + 1}$$

Ainsi, $\lim\limits_{x\to-\infty} x = -\infty$ et donc, en appliquant la règle des signes, $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{1-x^4}{2+x+x^3} = +\infty$.

Or, $\lim\limits_{X\to+\infty} e^X = +\infty$. Finalement, $\lim\limits_{x\to-\infty} \left(\exp\left(\dfrac{1-x^4}{2+x+x^3}\right)\right) = +\infty$

r. $\lim\limits_{x\to+\infty} x = +\infty$ et donc, en appliquant la règle des signes, $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1-x^4}{2+x+x^3} = -\infty$. Or, $\lim\limits_{X\to-\infty} e^X = 0$. Finalement, $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(\exp\left(\dfrac{1-x^4}{2+x+x^3}\right)\right) = 0$

Corrigé de l'exercice 5

1) Les racines du polynôme $2x^2 + x - 3$ sont 1 et $-\dfrac{3}{2}$; ainsi, f est définie sur $\mathbb{R} \setminus \left\{-\dfrac{3}{2}, 1\right\}$.

2) Pour tout $x \neq 1$ et $x \neq -\frac{3}{2}$, on a :

$$f(x) = \frac{x^2}{x^2} \times \frac{1 - \frac{4}{x} - \frac{12}{x^2}}{2 + \frac{1}{x} - \frac{3}{x^2}} = \frac{1 - \frac{4}{x} - \frac{12}{x^2}}{2 + \frac{1}{x} - \frac{3}{x^2}}.$$

On obtient donc les limites :

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \frac{1}{2}, \quad \lim_{x\to-\infty} f(x) = \frac{1}{2}, \quad \lim_{x\to(-\frac{3}{2})^-} f(x) = -\infty, \quad \lim_{x\to(-\frac{3}{2})^+} f(x) = +\infty.$$

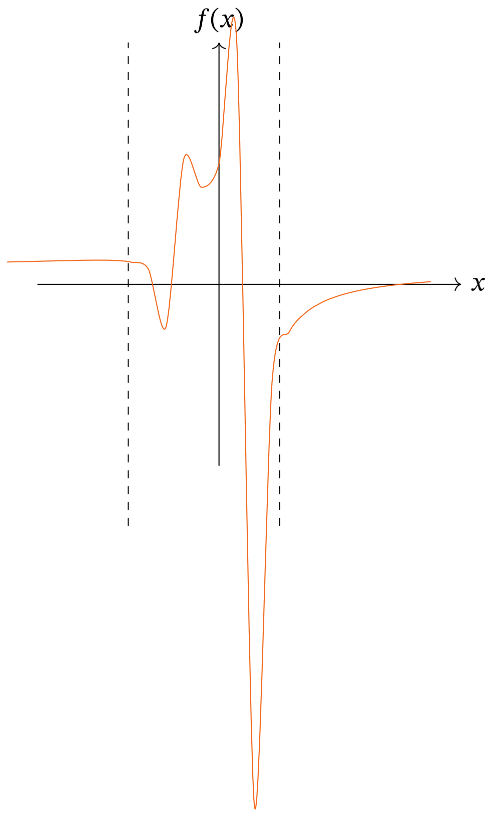
Enfin, on obtient les limites à proximité de 1 :

$$\lim_{x\to1^-} f(x) = +\infty, \quad \lim_{x\to1^+} f(x) = -\infty.$$

3) La fonction f est le quotient de deux fonctions polynomiales dérivables et son dénominateur ne s'annule pas sur son domaine de définition. Elle est donc dérivable sur D. Pour tout $x \in D$, la dérivée de f est donnée par :

$$f'(x) = \frac{(2x-4)(2x^2+x-3) - (x^2-4x-12)(4x+1)}{(2x^2+x-3)^2}.$$

4) $f'(x)$ permet d'établir que f est strictement croissante pour $x < -\frac{3}{2}$ et $x > 1$, et strictement décroissante pour $-\frac{3}{2} < x < 1$.



5)

Corrigé de l'exercice 6

1) $\sqrt{x^2-3x+2}$ existe si et seulement si $x^2-3x+2 \geq 0$. Or, x^2-3x+2 est un polynôme du second degré dont les racines sont 1 et 2. Ainsi, $\sqrt{x^2-3x+2}$ existe pour $x \in]-\infty; 1] \cup [2; +\infty[$. De plus, la fonction f est définie pour $x \neq -1$ car cela annule le dénominateur. Le domaine de définition de f est donc $(]-\infty;1] \cup [2;+\infty[) \setminus \{-1\}$.

2)
- $\lim_{x\to+\infty} f(x) = 1$,
- $\lim_{x\to-\infty} f(x) = -1$,
- $\lim_{x\to(-1)^-} f(x) = -\infty$,
- $\lim_{x\to(-1)^+} f(x) = +\infty$.

Corrigé de l'exercice 7

1) On développe l'expression de droite :

$$(x-1)(ax^2+bx+c) = ax^3 + (b-a)x^2 + (c-b)x - c.$$

En identifiant les coefficients avec ceux de $2x^3+6x^2-9x+1$, on trouve $a=2$, $b=8$, et $c=-1$.

2) Pour tout réel $x \neq 1$, on a :

$$\frac{2x^3+6x^2-9x+1}{3x^2-x-2} = \frac{(x-1)(2x^2+8x-1)}{(x-1)(3x+2)} = \frac{2x^2+8x-1}{3x+2}.$$

Ainsi, $\lim_{x\to1} \frac{2x^3+6x^2-9x+1}{3x^2-x-2} = \frac{9}{5}$.

Corrigé de l'exercice 8

1) Le taux de variation entre 0 et h est donné par $\frac{e^h - e^0}{h-0} = \frac{e^h-1}{h}$.

2) On a $f'(0) = e^0 = 1$. Par définition de la dérivée, on obtient :

$$\lim_{x\to0} \frac{e^x-1}{x} = 1.$$

Corrigé de l'exercice 9

1) Le domaine de définition de f est $\mathbb{R} \setminus \{-1\}$, car $2x+2$ s'annule pour $x=-1$. Le signe de f est donné par celui de x^2+3x-4 sur $\mathbb{R}$. Les racines de x^2+3x-4 sont 1 et -4, ce qui permet de construire le tableau de signes suivant :

x	$-\infty$	-4	-1	1	$+\infty$
x^2+3x-4	$+$	0	$-$	0	$+$
$2x+2$	$-$	0	$+$		
$f(x)$	$-$	d	$+$		

Les limites de f sont :

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \frac{1}{2}, \quad \lim_{x\to-\infty} f(x) = \frac{1}{2}.$$

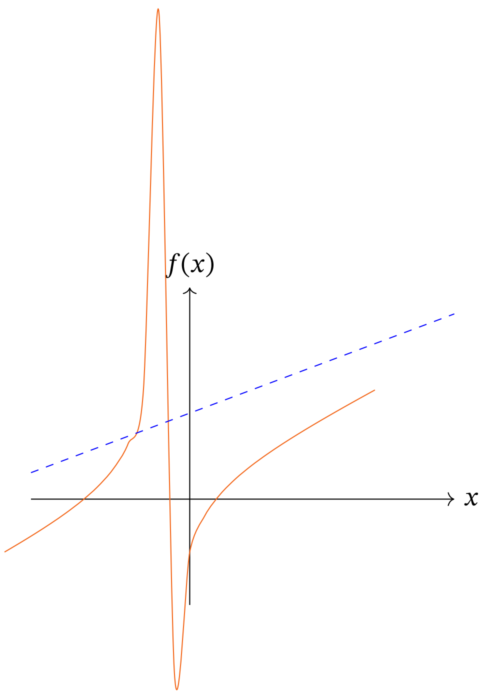
2) Pour tout $x \neq -1$, on a :

$$g(x) = f(x) - \left(\frac{1}{2}x+1\right) = \frac{x^2+3x-4}{2x+2} - \left(\frac{1}{2}x+1\right) = \frac{-6}{2x+2}.$$

3) On en déduit :

$$\lim_{x\to+\infty} g(x) = 0, \quad \lim_{x\to-\infty} g(x) = 0.$$

La droite $y = \frac{1}{2}x+1$ est donc une asymptote oblique à la courbe de f.



4)

Corrigé de l'exercice 10

1) On écrit $f(x)$ sous la forme :

$$f(x) = \frac{x^2}{x-1} = \frac{x^2-(x-1)(ax+b)}{x-1} = ax+b+\frac{c}{x-1}.$$

En identifiant les coefficients, on trouve $a = 1$, $b = 1$, et $c = 1$.

2) Ainsi, la courbe de f admet une asymptote oblique en $+\infty$ et en $-\infty$ d'équation $y = x+1$.

Corrigé de l'exercice 11

1) Le discriminant de x^2-3x+2 est positif avec pour racines 1 et 2. Le domaine de définition est donc $D =]-\infty;1]\cup[2;+\infty[$.

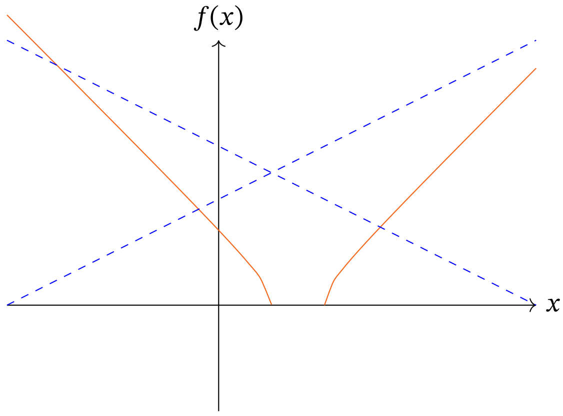
2) $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = x-\frac{3}{2}$, $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \frac{3}{2}-x$.

3) La fonction f est dérivable sur les intervalles $]-\infty;1]$ et $[2;+\infty[$ avec $f'(x) = \frac{2x-3}{2\sqrt{x^2-3x+2}}$. L'étude de $f'(x)$ montre que f est strictement croissante sur ces intervalles.

4) Le polynôme x^2-3x+2 peut s'écrire sous forme canonique :

$$x^2-3x+2 = \left(x-\frac{3}{2}\right)^2-\frac{1}{4}.$$

5) On en déduit que la droite $y = x-\frac{3}{2}$ est asymptote en $+\infty$, et la droite $y = \frac{3}{2}-x$ est asymptote en $-\infty$.



6)

Corrigé de l'exercice 12
Partie A

1) D'après la lecture graphique, on a $f(0) = 0,5$. La tangente en $A(0;0,5)$ a un coefficient directeur donné par $(y_B-y_A)/(x_B-x_A) = (1-0,5)/10 = 0,05$. Ainsi, $f'(0) = 0,05$.

2) En utilisant $f(0) = 0,5$, on a :

$$f(0) = \frac{a}{1+e^{-b\times 0}} = \frac{a}{1+1} = \frac{a}{2}.$$

Donc, $\frac{a}{2} = 0,5$ d'où $a = 1$.

3) La dérivée de $f(x) = \frac{a}{1+e^{-bx}}$ est donnée par :

$$f'(x) = \frac{d}{dx}\left(\frac{1}{1+e^{-bx}}\right) = \frac{be^{-bx}}{(1+e^{-bx})^2}.$$

4) En utilisant la valeur $f'(0) = 0,05$, on a :

$$f'(0) = \frac{be^{-b\times 0}}{(1+e^{-0})^2} = \frac{b}{4}.$$

Ainsi, $\frac{b}{4} = 0,05$, donc $b = 0,2$.

Partie B

1) En 2030, il s'est écoulé 10 années depuis le 1er janvier 2020, donc :

$$p(10) = \frac{1}{1+e^{-0,2\times 10}} \approx 0,88.$$

La proportion d'individus équipés au 1er janvier 2030 est donc environ 88%.

2) a) La dérivée de p est positive car pour tout x, $p'(x) = \frac{0,2e^{-0,2x}}{(1+e^{-0,2x})^2} > 0$. Donc, p est strictement croissante sur $[0;+\infty[$.

b) Pour tout $x \geq 0$, $e^{-0,2x} > 0$, donc $1+e^{-0,2x} > 1$. En prenant l'inverse, on obtient $p(x) < 1$. Cela est cohérent avec l'idée que la proportion d'individus équipés ne peut pas dépasser 1.

c) $\lim\limits_{x\to+\infty} p(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{1}{1+e^{-0,2x}} = 1$. Cela signifie que, dans le modèle, à long terme, toute la population sera équipée.

Corrigé de l'exercice 13

1) En dérivant $u(x)$, on trouve :

$$u'(x) = -\exp\left(2 - \frac{x}{10}\right) \times \left(-\frac{1}{10}\right) = \frac{1}{10}u(x).$$

Ainsi, $f'(x) = 10u'(x)e^{u(x)} = -u(x)e^{u(x)}$.

2) En calculant $f(20)$, on trouve :

$$f(20) = 10e^{u(20)} \approx 3,7.$$

Après 20 jours, la longueur de la queue est estimée à 3,7 cm.

3) On a $\lim_{x\to+\infty} u(x) = 0$ et donc $\lim_{x\to+\infty} f(x) = 10$. La queue ne pourra donc jamais atteindre 11 cm selon ce modèle.

4) La vitesse de croissance est maximale quand $f'(x)$ atteint son maximum. On montre que cela se produit environ au bout de 20 jours.

Corrigé de l'exercice 14

1) a) En dérivant $u(x) = -\exp\left(2 - \frac{x}{10}\right)$, on obtient :

$$u'(x) = -\exp\left(2 - \frac{x}{10}\right) \times \left(-\frac{1}{10}\right) = \frac{1}{10}u(x).$$

b) En utilisant $u'(x) = -\frac{1}{10}u(x)$, on trouve que pour tout $x \geq 0$:

$$f'(x) = 10u'(x)e^{u(x)} = -u(x)e^{u(x)}.$$

c) Puisque $u(x) < 0$ pour tout $x > 0$ et que $e^{u(x)} > 0$, on a $f'(x) > 0$ pour tout $x \geq 0$. La fonction f est donc strictement croissante sur $[0; +\infty[$.

2) a) On calcule $f(20)$:

$$f(20) = 10\exp\left(-\exp\left(2 - \frac{20}{10}\right)\right) = 10\exp\left(-e^0\right) = 10\exp(-1) \approx 3,7.$$

Après 20 jours, la longueur de la queue est d'environ 3,7 cm.

b) On a $\lim_{x\to+\infty} u(x) = 0$, donc $\lim_{x\to+\infty} f(x) = 10$. La queue du lézard ne peut donc pas dépasser 10 cm dans ce modèle.

c) Selon cette modélisation, la queue du lézard ne pourra jamais mesurer 11 cm puisque la limite de $f(x)$ est 10 cm.

3) a) La fonction $f'(x) = -u(x)e^{u(x)}$ est strictement positive pour $x \geq 0$, et $f''(x) = \frac{1}{10}u(x)e^{u(x)}(1 + u(x))$. On cherche à déterminer les variations de $f'(x)$.

Le signe de $f''(x)$ dépend du facteur $(1 + u(x))$. Puisque $u(x) \leq -1$ pour $x \leq 20$ et $u(x) \geq -1$ pour $x \geq 20$, on a $f''(x) > 0$ pour $x \leq 20$ et $f''(x) < 0$ pour $x \geq 20$. Ainsi, $f'(x)$ est croissante sur $[0; 20]$ et décroissante sur $[20; +\infty[$.

b) La vitesse de croissance de la queue du lézard est donc maximale après 20 jours.

Corrigé de l'exercice 15

Partie A

1) Graphiquement, $f(0) = 0,5$. La tangente à la courbe en A a un coefficient directeur de $\frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \frac{1-0,5}{10-0} = 0,05$, donc $f'(0) = 0,05$.

2) On sait que $f(0) = 0,5$. On a également :

$$f(0) = \frac{a}{1 + e^{-b\times 0}} = \frac{a}{1+1} = \frac{a}{2},$$

d'où $a = 1$.

3) La dérivée de $f(x) = \frac{a}{1+e^{-bx}}$ donne :

$$f'(x) = \frac{d}{dx}\left(\frac{1}{1 + e^{-bx}}\right) = \frac{be^{-bx}}{(1 + e^{-bx})^2}.$$

4) En utilisant les données graphiques, on sait que $f'(0) = 0,05$. En utilisant la dérivée :

$$f'(0) = \frac{be^{-b\times 0}}{(1 + e^{-0})^2} = \frac{b}{4}.$$

On résout $\frac{b}{4} = 0,05$, donc $b = 0,2$.

Partie B

1) En 2030, il s'est écoulé 10 ans depuis 2020, donc :

$$p(10) = \frac{1}{1 + e^{-0,2\times 10}} \approx 0,88.$$

La proportion d'individus équipés au 1er janvier 2030 est d'environ 88%.

2) a) La fonction $p(x)$ est strictement croissante sur $[0; +\infty[$ car sa dérivée est positive :

$$p'(x) = \frac{0,2e^{-0,2x}}{(1 + e^{-0,2x})^2} > 0.$$

b) Puisque $e^{-0,2x} > 0$ pour tout x, on a $1 + e^{-0,2x} > 1$, donc $p(x) = \frac{1}{1+e^{-0,2x}} < 1$. Cela est cohérent avec le contexte, car la proportion d'individus équipés ne peut jamais dépasser 1 (100%).

c) En calculant la limite de $p(x)$, on obtient :

$$\lim_{x\to+\infty} p(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{1 + e^{-0,2x}} = 1.$$

Cela signifie qu'à long terme, la totalité de la population sera équipée.