Parcours d'exercices

# Limites de suites

5 ALGEBRE

## 1 Continuité d'une fonction

**Exercice 1**

On considère la fonction

$$f : x \mapsto \begin{cases} 6x+8 & \text{si } x \leqslant -1 \\ -3x+7 & \text{si } -1 < x < 2 \\ x-1 & \text{si } x \geqslant 2 \end{cases}$$

$f$ est-elle continue en $-1$ ? et en $2$ ?

**Exercice 2**

On considère la fonction

$$f : x \mapsto \begin{cases} \frac{1}{2}x - 3 & \text{si } x \leqslant -2 \\ x+1 & \text{sinon} \end{cases}$$

définie sur $\mathbb{R}$.

1) Montrer que la fonction $f$ n'est pas continue en $-2$.
2) Tracer la courbe représentative de la fonction $f$ dans un repère orthonormé.

**Exercice 3**

Soit $a$ et $b$ deux réels. On considère la fonction $f$ : $x \mapsto \begin{cases} ax^2+bx+1 & \text{si } x < 1 \\ x^2+ax+b & \text{si } x \geqslant 1 \end{cases}$.
Montrer que la fonction $f$ est continue sur $\mathbb{R}$.

**Exercice 4**

On considère la fonction $f$ définie par $f(0) = 0$ et, pour tout réel non nul $x$, $f(x) = \exp\left(-\dfrac{1}{x^2}\right)$.
Montrer que $f$ est continue sur $\mathbb{R}$.

## Suites et fonction continue

**Exercice 5**

Déterminer $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \sqrt{\frac{4n^2+1}{n^2+3n+2}}$ et $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \exp\left(\frac{1}{n}\right)$, en énonçant bien les propriétés utilisées.

**Exercice 6**

On considère la fonction $f$ définie par $f(0) = 1$ et pour tout réel non nul $x$, $f(x) = \sin\left(\dfrac{1}{x}\right)$.

Pour tout entier naturel non nul $n$, on pose $u_n = \dfrac{1}{2n\pi}$.

1) Que vaut $f(u_n)$ pour tout entier naturel $n$ ?
2) Comparer $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} f(u_n)$ et $f(\displaystyle\lim_{n\to+\infty} u_n)$. La fonction $f$ est-elle continue en $0$ ?

**Exercice 7**

On considère la suite $(u_n)$ par $u_0 = 1$ et, pour tout entier naturel $n$, $u_{n+1} = -\dfrac{3}{u_n+1} + 3$

1) Montrer par récurrence que pour tout entier naturel $n$, $1 \leqslant u_n \leqslant 2$ et que la suite $(u_n)$ est croissante.
2) En déduire que la suite $(u_n)$ converge et déterminer la limite de la suite $(u_n)$.

**Exercice 8**

On considère la suite $(u_n)$ définie par $u_0 = 0$ et pour tout entier naturel $n$, $u_{n+1} = \sqrt{6+u_n}$

1) Supposons que $(u_n)$ converge : quelle peut-être sa limite ?
2) Montrer que pour tout entier naturel $n$, $0 \leqslant u_n \leqslant 3$ et que la suite $(u_n)$ est croissante.
3) Que peut-on en déduire sur la convergence de la suite $(u_n)$ ?

## Théorème des valeurs intermédiaires

**Exercice 9**

Pour tout réel $x > 0$, on pose $f(x) = e^x - \dfrac{1}{x}$.

1) Donner une valeur approchée à $10^{-1}$ près de $f(1)$ et $f(2)$.
2) En déduire que l'équation $f(x) = 2$ possède au moins une solution sur l'intervalle $[1;2]$.

**Exercice 10 : Bac 2021 – Amérique du Nord**

Un biologiste s'intéresse à l'évolution de la population d'une espèce animale sur une île du Pacifique.
Au début de l'année 2020, cette population comptait 600 individus. On considère que l'espèce sera menacée d'extinction sur cette île si sa population devient inférieure ou égale à 20 individus.
Le biologiste modélise le nombre d'individus par la

suite $(u_n)$ définie par par

$$\begin{cases} u_0 = 0,6 \\ \text{Pour tout entier naturel } n,\ u_{n+1} = 0,75u_n(1-0.15u_n) \end{cases}$$

où pour tout entier naturel $n$, $u_n$ désigne le nombre d'individus, en milliers, au début de l'année $2020+n$.

1) Estimer, selon ce modèle, le nombre d'individus présents sur l'île au début de l'année 2021 puis au début de l'année 2022.

Soit $f$ la fonction définie sur l'intervalle $[0;1]$ par $f(x) = 0,75x(1-0.15x)$

2) Montrer que la fonction $f$ est croissante sur $[0;1]$ et dresser son tableau de variations.
3) Résoudre dans l'intervalle $[0,1]$ l'équation $f(x) = x$.
4) Montrer par récurrence que pour tout entier naturel $n$, $0 \leqslant u_{n+1} \leqslant u_n \leqslant 1$.
5) En déduire que la suite $(u_n)$ est convergente et déterminer la limite de la suite $(u_n)$.
6) Justifier que, selon ce modèle, le biologiste a raison de penser que l'espèce sera menacée d'extinction.
7) Le biologiste a programmé en langage Python la fonction menace(), donner la valeur renvoyée et interpréter.

**Exercice 11**

On considère la fonction $f : x \mapsto e^x + x$, définie sur $\mathbb{R}$.

1) Justifier que $f$ est continue et dérivable sur $\mathbb{R}$ et déterminer $f'(x)$ pour tout réel $x$.
2) Quel est le sens de variation de $f$ sur l'intervalle $[-1;0]$ ?
3) Que vaut $f(0)$ ? Quel est le signe de $f(-1)$ ?
4) En déduire que l'équation $e^x + x = 0$ admet exactement une solution sur $[-1;1]$.

**Exercice 12**

On considère la fonction $f : x \mapsto 2x^3+9x^2-60x+3$, définie sur $\mathbb{R}$.

1) Étudier les variations de la fonction $f$.
2) En déduire la nombre de solutions de l'équation $f(x) = 0$ sur $\mathbb{R}$.

**Exercice 13**

Pour tout réel $x$, on pose $f(x) = x^5 - 2x - 4$.

1) Calculer $f(1)$ et $f(2)$.
2) En déduire que l'équation $x^5-2x-4 = 0$ possède au moins une solution sur $[1;2]$.
3) Écrire les 3 premières étapes de l'algorithme de dichotomie et donner un intervalle de longueur $\frac{1}{8}$ qui contient une solution de l'équation $x^5-2x-4 = 0$.
4) Donner une solution de cette équation au centième près.

**Exercice 14**

Soit $f$ et $g$ les fonction définies pour tout réel $x$ par $f(x) = (1-x)e^x + 1$ et $g(x) = \dfrac{x}{e^x+1}$

1) Construire le tableau de variations de $f$ en y incluant les limites.
2) En déduire que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution sur $\mathbb{R}$ et en donner une valeur à $10^{-2}$ près. On note $\alpha$ ce réel.
3) Montrer que pour tout réel $x$, $g'(x) = \dfrac{f(x)}{(1+e^x)^2}$
4) Construire le tableau de variations de $g$.

**Exercice 15**

Soit $f$ une fonction continue sur $[0,1]$ telle que, pour tout réel $x \in [0;1]$, on a $f(x) \in [0;1]$. Montrer que l'équation $f(x) = x$ admet au moins une solution sur $[0;1]$.

# Synthèse

**Exercice 16 : Bac 2023 – Centres étrangers**

Un biologiste a modélisé l'évolution d'une population de bactéries (en milliers d'entités) par la fonction $f$ définie sur $[0;+\infty[$ par $f(t) = e^3 - e^{-0.5t^2+t+2}$, où $t$ désigne le temps en heures depuis le début de l'expérience.
À partir de cette modélisation, il propose les trois affirmations ci-dessous. Pour chacune d'elles, indiquer, en justifiant, si elle est vraie ou fausse.

- **Affirmation 1** : « La population augmente en permanence ».
- **Affirmation 2** : « À très long terme, la population dépassera 21 000 bactéries ».
- **Affirmation 3** : « La population de bactéries aura un effectif de 10 000 à deux reprises au cours du temps ».

**Exercice 17 : Bac 2023 - Polynésie**

*Les parties A et B peuvent être traitées indépendamment*

**Partie A**

On considère la fonction $f$ définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = \left(x + \frac{1}{2}\right)\mathrm{e}^{-x+x}.$$

1) Déterminer les limites de $f$ en $-\infty$ et en $+\infty$.
2) On admet que $f$ est deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$.
   a) Démontrer que, pour tout $x \in \mathbb{R}$,
   $$f''(x) = \left(x - \frac{3}{2}\right)\mathrm{e}^{-x}.$$
   b) En déduire les variations et le minimum de la fonction $f'$ sur $\mathbb{R}$.
   c) Justifier que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f'(x) > 0$.
   d) En déduire que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution sur $\mathbb{R}$.
   e) Donner une valeur arrondie à $10^{-3}$ de cette solution.

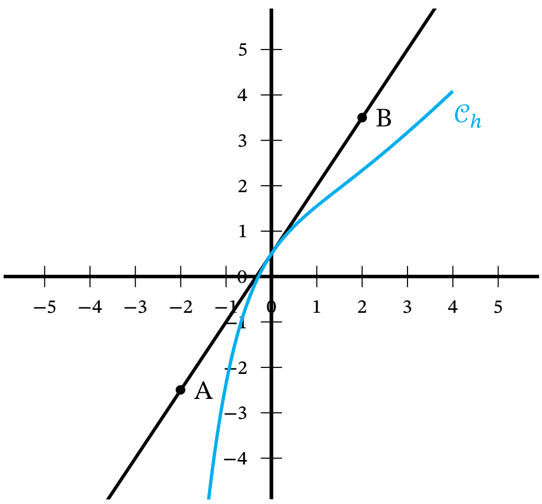
**Partie B**

On considère une fonction $h$, définie et dérivable sur $\mathbb{R}$, ayant une expression de la forme

$$h(x) = (ax+b)\mathrm{e}^{-x+x}, \text{ où } a \text{ et } b \text{ sont deux réels.}$$

Dans un repère orthonormé ci-après figurent :

- la courbe représentative $\mathcal{C}_h$ de la fonction $h$ ;
- les points A et B de coordonnées respectives $(-2\,;\,-2,5)$ et $(2\,;\,3{,}5)$.




1) Conjecturer, avec la précision permise par le graphique, les abscisses des éventuels points d'inflexion de la courbe représentative de la fonction $h$.
2) Sachant que la fonction $h$ admet sur $\mathbb{R}$ une dérivée seconde d'expression
   $$h''(x) = -\frac{3}{2}\mathrm{e}^{-x+x\mathrm{e}^{-x}}.$$
   valider ou non la conjecture précédente.

3) Déterminer une équation de la droite (AB).
4) Sachant que la droite (AB) est tangente à la courbe représentative de la fonction $h$ au point d'abscisse 0, en déduire les valeurs de $a$ et $b$.

10

**Exercice 18 : Bac 2024 - Centres étrangers**

On considère la fonction $f$ définie sur l'intervalle $]-\infty\,;\,1[$ par $f(x) = \dfrac{\mathrm{e}^x}{x-1}$.
On admet que la fonction $f$ est dérivable sur l'intervalle $]-\infty\,;\,1[$ .
On appelle $\mathcal{C}$ sa courbe représentative dans un repère.

1) a) Déterminer la limite de la fonction $f$ en 1.
   b) En déduire une interprétation graphique.
2) Déterminer la limite de la fonction $f$ en $-\infty$.
3) a) Montrer que pour tout réel $x$ de l'intervalle $]-\infty\,;\,1[$ , on a $f'(x) = \dfrac{(x-2)\mathrm{e}^x}{(x-1)^2}$.
   b) Dresser, en justifiant, le tableau de variations de la fonction $f$ sur l'intervalle $]-\infty\,;\,1[$.
4) On admet que pour tout réel $x$ de l'intervalle $]]-\infty\,;\,1[$, on a
   $$f''(x) = \frac{\left(x^2-4x+5\right)\mathrm{e}^x}{(x-1)^3}.$$
   a) Étudier la convexité de la fonction $f$ sur l'intervalle $]-\infty\,;\,1[$.
   b) Déterminer l'équation réduite de la tangente $T$ à la courbe $\mathcal{C}$ au point d'abscisse 0.
   c) En déduire que, pour tout réel $x$ de l'intervalle $]-\infty\,;\,1[$, on a :
   $\mathrm{e}^{x \geqslant (-2x-1)(x-1)}$.
5) a) Justifier que l'équation $f(x) = -2$ admet une unique solution $\alpha$ sur l'intervalle $]-\infty\,;\,1[$.
   b) À l'aide de la calculatrice, déterminer un encadrement de $\alpha$ d'amplitude $10^{-2}$.

Correction