Arithmétique : 2. Division euclidienne dans $\mathbb{Z}$ — Terminale Maths Expert

Exercice 1 : 79 p 106

Dans chacun des cas suivants, déterminer le quotient et le reste de la division euclidienne de a par b.

1) $a = -51$ et $b = 6$.
2) $a = -40$ et $b = 3$.
3) $a = -40$ et $b = 11$.

Exercice 2

n et p sont deux entiers naturels. On sait que le reste de la division euclidienne de n par 11 vaut 8 et que le reste de la division euclidienne de p par 11 vaut 7.
Quel est le reste de la division euclidienne de $n + p$ par 11 ?

Exercice 3 : 80 p 106

Sachant que le reste de la division euclidienne d'un entier a par 7 est 6, déterminer le reste de la division euclidienne de $2a$ par 7, de $-3a$ par 7 et de $4a$ par 7.

Exercice 4 : 38p104

Démontrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, l'entier $N = n(n+2)(n-5)(n+5)$ est divisible par 4.

Exercice 5 : 42p104

Le reste de la division euclidienne de a par 7 est 4 ; le reste de la division euclidienne de b par 7 est 6.

1) Déterminer le reste de la division euclidienne de $a + b$ par 7.
2) Déterminer le reste de la division euclidienne de $a - b$ par 7.

Exercice 6 : 43p104

1) Dans la division euclidienne de 2512 par un entier naturel b, le quotient est 54. Le reste peut-il valoir 7 ?
2) Dans la division euclidienne de 31631 par un entier naturel b, le quotient est 253. Le reste peut-il valoir 6 ?

Exercice 7 : 44p104

Dans la division euclidienne de 97 par un entier b, le reste est 6. Donner les valeurs possibles de b et du quotient.

Exercice 8

Soit n un entier naturel : Déterminer, en fonction de n, le reste dans la division euclidienne de $7n + 6$ par $3n + 1$.

Arithmétique : 2. Division euclidienne dans $\mathbb{Z}$ (Correction) Terminale Maths Expert

Corrigé de l'exercice 1

1. $-51 = 6 \times (-9) + 3$ et $0 \leqslant 3 < 6$. Le quotient de –51 par 6 est –9, le reste de cette division est 3.
2. $-40 = 3 \times (-14) + 2$ et $0 \leqslant 2 < 3$. Le quotient de –40 par 3 est –14 et le reste de cette division est 2.
3. $-40 = 11 \times (-4) + 4$ et $0 \leqslant 4 < 11$. Le quotient de –40 par 11 est -4 et le reste de cette division est 4.

Corrigé de l'exercice 2
Corrigé de l'exercice 3
D'après l'énoncé, la division euclidienne de a par 7 s'écrit $a = 7q + 6$.
D'où $2a = 7 \times 2q + 12 = 7 \times (2q + 1) + 5$ et $0 \leqslant 5 < 7$, donc le reste de la division euclidienne de $2a$ par 7 est 5.
De même, $-3a = 7 \times (-3q) - 18 = 7 \times (-3q) - 21 + 3 = 7 \times (-3q - 3) + 3$ et $0 \leqslant 3 < 7$, donc le reste de la division euclidienne de $-3a$ par 7 est 3.
Enfin, la division euclidienne de $4a$ par 7 s'écrit $4a = 7 \times 4q + 24 = 7 \times (4q + 3) + 3$ et $0 \leqslant 3 < 7$, donc le reste vaut 3.
Corrigé de l'exercice 4
Soit n un entier naturel. On va effectuer une démonstration par disjonction de cas.
Cas n°1 : Il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que $n = 4k$.
Dans ce cas, on a alors $N = 4\,(k(4k + 2)(4k - 5)(4k + 5))$ donc N est divisible par 4.
Cas n°2 : Il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que $n = 4k + 1$.
On a alors $N = (4k + 1)(4k + 3)(4k - 4)(4k + 6) = 4(4k + 1)(4k + 3)(k - 1)(4k + 6)$ donc N est divisible par 4.
Cas n°3 : Il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que $n = 4k + 2$.
On a alors $N = (4k + 2)(4k + 4)(4k - 3)(4k + 7) = 4(4k + 2)(k + 1)(4k - 3)(4k + 7)$ donc N est divisible par 4.
4ème cas : Il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que $n = 4k + 3$.
On a alors $N = (4k+3)(4k+5)(4k-2)(4k+8) = 4(4k+3)(4k+5)(4k-2)(k+2)$ donc $N est divisible par 4$.
Ainsi, pour tout entier naturel n, N est divisible par 4.
Corrigé de l'exercice 5
La division euclidienne de a par 7 s'écrit $a = 7k + 4$ avec k entier.
La division euclidienne de b par 7 s'écrit $b = 7k' + 6$ avec k' entier.

1. Ainsi, on a $a + b = 7k + 4 + 7k' + 6 = 7(k + k') + 10 = 7(k + k' + 1) + 3$.
   Or $0 \leqslant 3 < 7$, donc 3 est le reste de la division euclidienne de $a + b$ par 7.
2. De même, $a - b = 7(k - k') - 2 = 7(k - k' - 1) + 5$. Or $0 \leqslant 5 < 7$, donc 5 est le reste de la division euclidienne de $a - b$ par 7.

Corrigé de l'exercice 6

1. D'après l'énoncé, la division euclidienne de 2512 par b s'écrit $2512 = 54b + r$, où r désigne le reste de cette division. Supposons que ce reste soit égal à 7. On a alors $2512 = 54b + 7 \Leftrightarrow 2505 = 54b$. Or 2505 n'est pas divisible par 54.

   Le reste ne peut donc pas être égal à 7.

2. D'après l'énoncé, la division euclidienne de 31631 par b s'écrit $31631 = 253b + r$, où r désigne le reste de cette division. Supposons que ce reste soit égal à 6. On a alors $31631 = 253b + 6 \Leftrightarrow 31625 = 253b \Leftrightarrow b = 125$. D'où $0 \leqslant 6 < 125$.

   Le reste peut donc être égal 6.

Corrigé de l'exercice 7
D'après l'énoncé, la division euclidienne de 97 par b s'écrit $97 = qb + 6$. On en déduit que $qb = 91$. D'une part, les diviseurs de 91 sont -1, 1, 7, -7, 13, -13, -91, 91. D'autre part, le reste de la division euclidienne de 97 par b étant 6, on doit avoir $b > 6$.
On en déduit que b et q peuvent prendre les valeurs suivantes : $b = 7$ et $q = 13$, $b = 13$ et $q = 7$ ou $b = 91$ et $q = 1$.
Corrigé de l'exercice 8
En vidéo