Arithmétique : Divisibilité dans $\mathbb{Z}$ — Terminale Maths Expert

Exercice 1 : n°27
Déterminer, dans $\mathbb{Z}$, les diviseurs communs de 12 et de 50.

Exercice 2 : n°54
1. Donner deux nombres impairs consécutifs et vérifier que leur somme est divisible par 4.
2. Démontrer, que la somme de deux entiers impairs consécutifs est divisible par 4.

Exercice 3 : n°29
Déterminer dans chaque cas les entiers naturels x et y tels que :

1. $x^2 - y^2 = 12$.
2. $x^2 - y^2 = -15$.

Exercice 4 : n°56
Dans chaque cas, déterminer tous les entiers naturels n tels que :

1. 11 divise $n+3$.
2. 6 divise $3n-9$.

Exercice 5 : n°31
1. Déterminer les entiers naturels n tels que $2n-7$ divise 5.
2. Déterminer les entiers relatifs n tels que $n+4$ divise 6.

Exercice 6 : n°33
Déterminer les entiers naturels n tels que $4n+1$ divise $n-3$.

Exercice 7 : n°36
Déterminer tous les couples d'entiers naturels $(x;y)$ vérifiant

$$x + y = xy$$

Exercice 8 : n°57
Dans chaque cas, déterminer tous les entiers naturels n tels que :
1. $n+6$ soit divisible par n ;
2. $n+11$ soit divisible par $n-1$;
3. $n-3$ divise $n+2$.

Exercice 9 : n°63
On pose, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $a_n = 2^{3n} - 3^n$.

1. Calculer a_1, a_2 et a_3 puis conjecturer l'existence d'un diviseur de a_n pour $n \in \mathbb{N}^*$.
2. Démontrer cette conjecture par récurrence.

Exercice 10 : n°68
Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n, $2^{3n} - 5^n$ est divisible par 3.

Exercice 11 : n°69
Soient a et b deux entiers relatifs.
Démontrer que : $13 \mid (8a+5b) \iff 13 \mid (5a+8b)$.

Corrigé de l'exercice 1
L'ensemble des diviseurs de 12 est $D_{12} = \{-1; -2; -3; -4; -6; -12; 1; 2; 3; 4; 6; 12\}$.
L'ensemble des diviseurs de 50 est $D_{50} = \{-1; -2; -10; -5; -25; -50; 1; 2; 10; 5; 25; 50\}$.
Les diviseurs communs de 12 et 50 sont donc -1, -2, 1 et 2.
Corrigé de l'exercice 2

1. Prenons, par exemple, 3 et 5 deux nombres impairs consécutifs. On a $3 + 5 = 8$ et 8 est bien divisible par 4.
2. Soient $n = 2k+1$ et $n' = 2k+3$ deux entiers impairs consécutifs. On a alors $n+n' = 2k+1+2k+3 = 4k + 4 = 4(k + 1)$, donc $n + n'$ est bien divisible par 4.

Corrigé de l'exercice 3

1. $x^2 - y^2 = 12$ équivaut à $(x - y)(x + y) = 12$. On cherche des solutions positives. Ainsi, $x + y$ est positif, tout comme $x - y$ d'après la règle des signes. On commence donc par étudier l'ensemble des diviseurs positifs de 12, qui est $D_{12} = \{1; 2; 3; 4; 6; 12\}$.
   De plus, $x \in \mathbb{N}$ et $y \in \mathbb{N}$ donc $0 \leqslant x - y \leqslant x + y$. Les solutions sont donc les solutions des systèmes : $\begin{cases} x - y = 1 \\ x + y = 12 \end{cases}$ ou $\begin{cases} x - y = 2 \\ x + y = 6 \end{cases}$ ou $\begin{cases} x - y = 3 \\ x + y = 4 \end{cases}$.
   Or $\begin{cases} x - y = 1 \\ x + y = 12 \end{cases}$ équivaut à $\begin{cases} x = \dfrac{13}{2} \\ y = 12 - \dfrac{13}{2} \end{cases}$, $\begin{cases} x - y = 2 \\ x + y = 6 \end{cases}$ équivaut à $\begin{cases} x = 4 \\ y = 2 \end{cases}$ et $\begin{cases} x - y = 3 \\ x + y = 4 \end{cases}$ équivaut à $\begin{cases} x = \dfrac{7}{2} \\ y = 4 - \dfrac{7}{2} \end{cases}$.
   Le premier et le dernier système n'admettant pas de solutions entières, l'équation $x^2 - y^2 = 12$ admet un unique couple solution dans $\mathbb{N}^2$: $(4; 2)$.
2. $x^2 - y^2 = -15$ équivaut à $y^2 - x^2 = 15$, ce qui est équivalent à $(y - x)(y + x) = 15$. On cherche des solutions positives. Ainsi, $x + y$ est positif, tout comme $x - y$ d'après la règle des signes. On commence donc par étudier l'ensemble des diviseurs positifs de 15, qui est $D_{15} = \{1; 3; 5; 15\}$.
   De plus, comme x et y sont entiers, alors $0 \leqslant y - x \leqslant x + y$.
   Les solutions sont donc les solutions des systèmes : $\begin{cases} y - x = 1 \\ y + x = 15 \end{cases}$ ou $\begin{cases} y - x = 3 \\ y + x = 5 \end{cases}$.
   Or $\begin{cases} y - x = 1 \\ y + x = 15 \end{cases}$ équivaut à $\begin{cases} y = 8 \\ x = 7 \end{cases}$ et $\begin{cases} y - x = 3 \\ y + x = 5 \end{cases}$ équivaut à $\begin{cases} y = 4 \\ x = 1 \end{cases}$.
   Donc les solutions sur $\mathbb{N}^2$ de l'équation $x^2 - y^2 = -15$ sont $(1; 4)$ et $(7; 8)$.

Corrigé de l'exercice 4

1. Si 11 divise $n + 3$, alors il existe $k \in \mathbb{N}$ tel que $n + 3 = 11k$. Ainsi, $n = 11k - 3$.
   n étant un entier naturel, on doit avoir $k \geqslant 1$. Donc les entiers naturels n vérifiant cette condition sont les entiers n tels qu'il existe un entier naturel non nul k tel que $n = 11k - 3$.
2. Si 6 divise $3n - 9$, alors il existe $k \in \mathbb{N}$ tel que $3n - 9 = 6k$. Ainsi, $n = 2k + 3$. Donc les entiers naturels n vérifiant cette condition sont les entiers n tels qu'il existe un entier naturel k tel que $n = 2k + 3$.

Corrigé de l'exercice 5

1. Si $2n-7$ divise 5, alors $2n-7$ est un diviseur de 5 et donc $2n-7$ est un élément de l'ensemble $D_5=\{-1;-5;1;5\}$. Les valeurs possibles de n sont donc :
   $2n-7=-1 \Leftrightarrow 2n=6 \Leftrightarrow n=3$
   $2n-7=-5 \Leftrightarrow 2n=2 \Leftrightarrow n=1$
   $2n-7=1 \Leftrightarrow 2n=8 \Leftrightarrow n=4$
   $2n-7=5 \Leftrightarrow 2n=12 \Leftrightarrow n=6$
   Les valeurs possibles de n sont donc 3, 1, 4 et 6.
2. De même, si $n+4$ divise 6, alors $n+4$ appartient à l'ensemble :
   $D_6=\{-1;-2;-3;-6;1;2;3;6\}$.
   Les valeurs possibles de n sont donc –10, –7, –6, –5, –3, –2, –1 et 2.

Corrigé de l'exercice 6

D'une part, $4n+1 \mid n-3$ et, d'autre part, $4n+1 \mid 4n+1$. Donc $4n+1$ divise toute combinaison linéaire de$n-3$ et $4n+1$. En particulier, $4n+1 \mid [4n+1-4(n-3)]$ donc $4n+1 \mid 13$.

Les éventuelles solutions sont donc les diviseurs de 13 : $D_{13}=\{-1,-13,1,13\}$.

De plus, $4n+1\in\mathbb{N}$ car $n\in\mathbb{N}$, donc $4n+1$ est un diviseur positif de 13.

Donc soit $4n+1=1$ donc $n=0$, soit $4n+1=13$ donc $n=3$.

Réciproquement, si $n=0$, on a $4n+1=1$ et $n-3=-3$. Or $1 \mid -3$ donc 0 est bien solution. De même, si $n=3$, on a $4n+1=13$ et $n-3=0$. Or $13 \mid 0$ donc 3 est bien solution.

En conclusion, les solutions de ce problème sont $n=0$ et $n=3$.

Corrigé de l'exercice 7

Soient x et y deux entiers naturels vérifiant $x+y=xy$.

On a, d'une part, $x \mid xy$. Mais comme $xy=x+y$, alors on a $x \mid x+y$. Ainsi, $x \mid x$ et $x \mid x+y$ donc x divise toute combinaison linéaire de x et $x+y$, d'où $x|(x+y-x)$. Ainsi, $x \mid y$.

D'autre part, on a $y \mid xy$, ce qui nous permet de montrer, de la même manière, que $y \mid x$.

On vient donc de montrer que $x \mid y$ d'une part, et, d'autre part, $y \mid x$.

Comme x et y sont tous les jeux positifs, on en déduit que $x=y$.

Ainsi, l'équation se réécrit $2x=x^2$, dont les solutions sont 0 et 2.

Réciproquement, si $x=0$ et $y=0$, l'égalité est bien vérifiée, donc $(0;0)$ est bien solution. Si $x=2$ et $y=2$, alors $2+2=2\times 2$, donc $(2;2)$ est également solution.

En conclusion, les solutions positives de l'équation $x+y=xy$ sont les couples d'entiers naturels $(0;0)$ et $(2;2)$.

Corrigé de l'exercice 8

1. On a, d'une part, $n \mid n+6$ et, d'autre part, $n \mid n$. Donc n divise toute combinaison linéaire de $n+6$ et n et, en particulier $n \mid (n+6-n)$ donc $n \mid 6$. Ainsi, les solutions possibles sont les diviseurs positifs de 6 : 1, 2, 3 et 6.

   Réciproquement, si $n=1$, on a $n+6=7$ et $1 \mid 7$ donc 1 est bien solution ; si $n=2$, on a $n+6=8$ et $2 \mid 8$ donc est bien solution ; si $n=3$, on a $n+6=9$ et $3 \mid 9$ donc 3 est bien solution ; si $n=6$, on a $n+6=12$ et $6 \mid 12$ donc 6 est bien solution.

   En conclusion, les solutions de ce problème sont 1, 2, 3 et 6.
2. On a, d'une part, $n-1 \mid n+11$ et, d'autre part, $n-1 \mid n-1$ donc $n-1$ divise toute combinaison linéaire de $n+11$ et $n-1$ et, en particulier, $n-1 \mid (n+11-n+1)$ donc $n-1 \mid 12$. De plus, $n\in\mathbb{N}$ donc $n-1 \geqslant -1$. Ainsi, les valeurs possibles de $n-1$ sont les diviseurs de 12 supérieurs ou égaux à –1 : –1, 1, 2, 3, 4, 6 et 12. Les valeurs éventuelles de n sont donc 0, 2, 3, 4, 7 et 13.

   Réciproquement, si $n=0$, on a $n-1=-1$, $n+11=12$ et $-1 \mid 12$ donc 0 est bien solution ; si $n=2$, on a $n-1=1$, $n+11=13$ et $1 \mid 13$ donc 2 est bien solution ; si $n=3$, on a $n-1=2$, $n+11=14$ et $2 \mid 14$ donc 3 est bien solution ; si $n=4$, on a $n-1=3$, $n+11=15$ et $3 \mid 15$ donc 4 est bien solution ; si $n=7$, on a $n-1=6$, $n+11=18$ et $6 \mid 18$ donc 7 est bien solution ; si $n=13$, on a $n-1=12$, $n+11=24$ et $12 \mid 24$ donc 13 est bien solution.

   En conclusion, les solutions de ce problème sont 0, 2, 3, 4, 7 et 13.

3. On a, d'une part, $n-3 \mid n+2$ et, d'autre part, $n-3 \mid n-3$ donc $n-3$ divise toute combinaison linéaire de $n+2$ et $n-3$ et, en particulier, $n-3 \mid (n-3)-(n+2)$, c'est-à-dire $n-3 \mid 5$. De plus, $n \in \mathbb{N}$ donc $n-3 \geqslant -3$. Ainsi, les valeurs possibles de $n-3$ sont les diviseurs de 5 supérieurs ou égaux à –3 : –1, 1 et 5. Donc les valeurs possibles de n sont 2, 4 et 8.

   Réciproquement, si $n=2$, on a $n-3=-1$, $n+2=4$ et $-1 \mid 4$ donc 2 est bien solution ; si $n=4$, on a $n-3=1$ et $n+2=6$ et $1 \mid 6$ donc 4 est bien solution ; si $n=8$, on a $n-3=5$, $n+2=10$ et $5|10$ donc 8 est bien solution.

   En conclusion, les solutions de ce problème sont 2, 4 et 8.

Corrigé de l'exercice 9

1. On obtient $a_1=5$, $a_2=55$ et $a_3=485$. Il semble donc que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, 5 soit un diviseur de a_n.
2. Démontrons par récurrence que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, 5 est un diviseur de a_n.

   Initialisation : On a $a_1=5$ donc la propriété est vraie au rang $n=1$.

   Hérédité : Supposons la propriété vraie pour un entier n, c'est-à-dire qu'il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que $a_n=5k$. Démontrons qu'elle est vraie pour $n+1$, c'est-à-dire qu'il existe $K \in \mathbb{Z}$ tel que $a_{n+1}=5K$. On a $a_{n+1}=2^{3(n+1)}-3^{n+1}=2^{3n}\times 8-3^n\times 3=2^{3n}\times 8-3^n\times 8+5\times 3^n=8a_n+5\times 3^n$. Donc, par hypothèse de récurrence, $a_{n+1}=8\times(5k)+5\times 3^n=5(8k+3^n)$ et donc a_{n+1} est divisible par 5.

   Conclusion : On a montré que la propriété est vraie au rang 1, puis que si elle était vraie au rang n, alors elle est vraie au rang $n+1$. D'après le principe de récurrence, on en déduit que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, 5 est un diviseur de a_n.

Corrigé de l'exercice 10

Démontrons par récurrence que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $2^{3n}-5^n$ est divisible par 3.

Initialisation : $2^0-5^0=0$ et 0 est divisible par 3, donc la proposition est vraie pour $n=0$.

Hérédité : Supposons la propriété vraie pour un entier n, c'est-à-dire qu'il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que $2^{3n}-5^n=3k$. Démontrons qu'elle est vraie pour $n+1$, c'est-à-dire qu'il existe $K \in \mathbb{Z}$ tel que $2^{3(n+1)}-5^{n+1}=3K$.

On a $2^{3(n+1)}-5^{n+1}=2^3\times 2^{3n}-5\times 5^n=3\times 2^{3n}+5\left(2^{3n}-5^n\right)$ d'où, par hypothèse de récurrence, il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que $2^{3(n+1)}-5^{n+1}=3\times 2^{3n}+5\times 3k=3\left(2^{3n}+k\right)=3K$ en posant $K=2^{3n}+k$. En particulier, K est un entier, d'où $2^{3(n+1)}-5^{n+1}$ est divisible par 3.

Conclusion : On a montré que la propriété était vraie au rang 0, puis que si elle était vraie à une rang n, alors elle était également vraie au rang $n+1$. D'après le principe de récurrence, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $2^{3n}-5^n$ est divisible par 3.

Corrigé de l'exercice 11

On procède par double implication.

Démontrons tout d'abord que : $13 \mid 8a+5b \Rightarrow 13 \mid 5a+8b$.

On a, d'une part, $13 \mid 8a+5b$ et, d'autre part, $13 \mid 13a+13b$. Donc 13 divise toute combinaison linéaire de $8a+5b$ et $13a+13b$. En particulier, $13 \mid 13a+13b-8a-5b$ et donc $13 \mid 5a+8b$.

Démontrons maintenant que : $13 \mid 5a+8b \Rightarrow 13 \mid 8a+5b$.

On a, d'une part, $13 \mid 5a+8b$ et, d'autre part, $13 \mid 13a+13b$. Donc 13 divise toute combinaison linéaire de $5a+8b$ et $13a+13b$. En particulier, $13 \mid 13a+13b-5a-8b$ donc $13 \mid 8a+5b$.

En conclusion, on a $13 \mid 8a+5b \Leftrightarrow 13 \mid 5a+8b$.