Devoir surveillé 2 : Les suites

Nom : .... Prénom : .... Classe : T spé

– Calculatrice autorisée – 4 octobre 2024

Exercice 1 — 6 points

Déterminer les limites des suites suivantes

1. $u_n = \dfrac{n^4 - 2n^3 + 1}{2 - 3n^3}$
2. $v_n = \dfrac{3n + 2\cos(n)}{n + 1}$
3. $y_n = 4n - 3 \times (-1)^n$
4. $z_n = \dfrac{3^n - 4^n}{4^n - 2^n}$

Exercice 2 — 7 points

On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 1$ et, pour tout entier naturel n,

$$u_{n+1} = \frac{3}{4}u_n + \frac{1}{4}n + 1$$

1. Calculer u_1 et u_2. Les exprimer sous la forme d'une fraction irréductible.
2. Montrer par récurrence que pour tout entier naturel n,
$$n \leq u_n \leq n + 1$$
3. En déduire le sens de variations de la suite (u_n) ainsi que
$$\lim_{n \to +\infty} u_n$$
4. Déterminer, en justifiant,
$$\lim_{n \to +\infty} \frac{u_n}{n}$$

Exercice 3 : Sujet Polynésie 2021 — 8 points

On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 10\,000$ et pour tout entier naturel n :

$$u_{n+1} = 0,95u_n + 200.$$

1. Calculer u_1 et vérifier que $u_2 = 9\,415$.
2. (a) Démontrer, à l'aide d'un raisonnement par récurrence, que pour tout entier naturel n :
$$u_n > 4\,000.$$
   (b) On admet que la suite (u_n) est décroissante. Justifier qu'elle converge.
3. Pour tout entier naturel n, on considère la suite (v_n) définie par : $v_n = u_n - 4\,000$.
   (a) Démontrer que la suite (v_n) est géométrique .
   On donnera sa raison et son premier terme.
   (b) En déduire que pour tout entier naturel n :
$$u_n = 4\,000 + 6\,000 \times 0,95^n.$$
   (c) Quelle est la limite de la suite (u_n) ? Justifier la réponse.

Corrigé de l'exercice 1

1. $u_n = \dfrac{n^4 - 2n^3 + 1}{2 - 3n^3}$
   On reconnaît une forme indéterminée $\dfrac{\infty}{\infty}$
   Soit $n \in \mathbb{N}$:

$$\begin{aligned} u_n &= \frac{n^4 - 2n^3 + 1}{2 - 3n^3} \\ &= \frac{n^4\left(1 - \frac{2}{n} + \frac{1}{n^4}\right)}{n^3\left(\frac{2}{n^3} - 3\right)} \\ &= \frac{n\left(1 - \frac{2}{n} + \frac{1}{n^4}\right)}{\frac{2}{n^3} - 3} \end{aligned}$$

   par somme, $\lim\limits_{n \to +\infty} \left(1 - \dfrac{2}{n} + \dfrac{1}{n^4}\right) = 1$
   donc par produit, $\lim\limits_{n \to +\infty} n\left(1 - \dfrac{2}{n} + \dfrac{1}{n^4}\right) = +\infty$
   $\lim\limits_{n \to +\infty} \left(\dfrac{2}{n^3} - 3\right) = -3$
   donc par quotient de limites, $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = -\infty$

2. $v_n = \dfrac{3n + 2\cos(n)}{n+1}$
   Soit $n \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned} & -1 \leqslant \cos n \leqslant 1 \\ \iff & -2 \leqslant 2\cos n \leqslant 2 \\ \iff & -2 + 3n \leqslant 2\cos n + 3n \leqslant 2 + 3n \\ \iff & \frac{-2+3n}{n+1} \leqslant \frac{2\cos n + 3n}{n+1} \leqslant \frac{2+3n}{n+1} \quad \text{car } n + 1 > 0 \end{aligned}$$

   On a montré que,

$$\forall n \in \mathbb{N}, \frac{-2+3n}{n+1} \leqslant u_n \leqslant \frac{2+3n}{n+1}$$

   Soit $n \in \mathbb{N}$
   on a : $\dfrac{-2+3n}{n+1} = \dfrac{-\frac{2}{n} + 3}{1 + \frac{1}{n}}$
   et $\dfrac{2+3n}{n+1} = \dfrac{\frac{2}{n} + 3}{1 + \frac{1}{n}}$
   or $\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{\frac{2}{n} + 3}{1 + \frac{1}{n}} = \lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{-\frac{2}{n} + 3}{1 + \frac{1}{n}} = 3$
   La suite (u_n) est donc encadrée par deux suites convergent vers 3.
   D'après le théorème des gendarmes, on peut en déduire que $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = 3$

3. $y_n = 4n - 3 \times (-1)^n$
   Soit $n \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned} & -1 \leqslant (-1)^n \leqslant 1 \\ \iff & 3 \geqslant -3 \times (-1)^n \geqslant -3 \quad \text{car} \quad -3 < 0 \\ \iff & -3 \leqslant -3 \times (-1)^n \leqslant 3 \\ \iff & 4n - 3 \leqslant 4n - 3 \times (-1)^n \leqslant 4n + 3 \end{aligned}$$

   On a montré que,

$$\forall n \in \mathbb{N}, 4n - 3 \times (-1)^n \geqslant 4n - 3$$

   Comme $\lim\limits_{n \to +\infty} 4n - 3 = +\infty$, avec le théorème de comparaison, la suite (u_n) étant minorée par une suite qui diverge en $+\infty$, elle diverge elle même en $+\infty$.

$$\lim_{n \to +\infty} u_n = +\infty$$

4. $z_n = \dfrac{3^n - 4^n}{4^n - 2^n}$
   On reconnaît une forme indéterminée $\dfrac{\infty}{\infty}$
   Soit $n \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned} \frac{3^n - 4^n}{4^n - 2^n} &= \frac{4^n\left(\dfrac{3^n}{4^n} - 1\right)}{4^n\left(1 - \dfrac{2^n}{4^n}\right)} \\ &= \frac{\dfrac{3^n}{4^n} - 1}{1 - \dfrac{2^n}{4^n}} \\ &= \frac{\left(\dfrac{3}{4}\right)^n - 1}{1 - \left(\dfrac{1}{2}\right)^n} \end{aligned}$$

   On reconnaît des limites de suites géométriques, de raison $0 < q < 1$.
   $\lim\limits_{n \to +\infty} \left(\dfrac{3}{4}\right)^n = 0$ et $\lim\limits_{n \to +\infty} \left(\dfrac{1}{2}\right)^n = 0$
   Ainsi, par quotient :

$$\lim_{n \to +\infty} u_n = -1$$

Corrigé de l'exercice 2

1. Calculer $u_1 = \dfrac{7}{4}$ et $u_2 = \dfrac{41}{16}$.
2. On appelle $\mathcal{P}_n$ la propriété : « $n \leq u_n \leq n + 1$ »
   On va montrer par récurrence que pour tout entier naturel n, que $\mathcal{P}_n$ est vraie.

   Initialisation :
   Pour $n = 0$, comme $u_0 = 1$, on a bien $0 \leq u_0 \leq 0 + 1$.
   La propriété est initialisée en 0.

Hérédité :

Supposons qu'il existe un entier naturel n, tel que $\mathcal{P}_n$ soit vraie, c'est à dire que $n \leq u_n \leq n+1$.
On voudrait démontrer alors que $\mathcal{P}_{n+1}$ est vraie, c'est à dire que $n+1 \leq u_{n+1} \leq n+2$.
Soit $n\mathbb{N}$, on part de l'hypothèse de récurrence :

$$n \leq u_n \leq n+1$$

$$\frac{3}{4}n \leq \frac{3}{4}u_n \leq \frac{3}{4}(n+1) \quad \text{attention à la priorité de la parenthèse.}$$

$$\frac{3}{4}n + \frac{1}{4}n + 1 \leq \frac{3}{4}u_n + \frac{1}{4}n + 1 \leq \frac{3}{4}(n+1) + \frac{1}{4}n + 1$$

$$n+1 \leq u_{n+1} \leq n + \frac{7}{4} \leq n+2 \quad \text{on utilise : } \frac{7}{4} \leq 2$$

$$n+1 \leq u_{n+1} \leq n+2$$

On a montré que $\mathcal{P}_n$ est bien héréditaire.

Conclusion :

$\mathcal{P}_n$ est initialisée en 0, et héréditaire.
On peut n déduire que par récurrence, $\mathcal{P}_n$ est vraie pou tout entier n.
Pour tout entier naturel n,on a :

$$n \leq u_n \leq n+1$$

3. **Sens de variations de la suite (u_n) :**

Soit $n \in \mathbb{N}$:
On vient de montrer que : $n \leq u_n \leq n+1$ et donc que $n+1 \leq u_{n+1} \leq n+2$.
Il vient naturellement que $n \leq u_n \leq n+1 \leq u_{n+1} \leq n+2$
ce qui implique que $u_n \leq u_{n+1}$
On vient donc de montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}, u_n \leq u_{n+1}$
La suite (u_n) est donc décroissante.

Limite de la suite (u_n) :

Comme on a, pour tout entier n, $n \leq u_n \leq n+1$ on en déduit que $u_n \geq n$ pour tout entier n.
Comme $\lim\limits_{n\to+\infty} n = +\infty$, en appliquant le théorème de comparaison,
on montre que

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = +\infty$$

Limite de la suite $\left(\frac{u_n}{n}\right)$:

Soit $n \in \mathbb{N}$:

$$n \leq u_n \leq n+1$$

$$\frac{n}{n} \leq \frac{u_n}{n} \leq \frac{n+1}{n} \quad n > 0$$

$$1 \leq \frac{u_n}{n} \leq \frac{n+1}{n}$$

Comme $\dfrac{n+1}{n} = \dfrac{n\left(1+\frac{1}{n}\right)}{n} = 1 + \dfrac{1}{n}$, on a alors $\lim\limits_{n\to+\infty} 1 + \dfrac{1}{n} = 1$
La suite $\left(\frac{u_n}{n}\right)$ est donc comprise entre deux suites qui tendent vers 1.
D'après le théorème des gendarmes, on peut déduire que $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{u_n}{n} = 1$

Corrigé de l'exercice 3

On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 10\,000$ et pour tout entier naturel n :

$$u_{n+1} = 0,95u_n + 200.$$

1.
   - $u_1 = 0,95 \times u_0 + 200 = 0,95 \times 10\,000 + 200 = 9\,500 + 200 = 9\,700.$
   - $u_2 = 0,95 \times u_1 + 200 = 0,95 \times 9\,700 + 200 = 9\,215 + 200 = 9\,415.$
2. (a) On démontre par récurrence, que pour tout entier naturel n : $u_n > 4\,000$.
   Initialisation : $u_0 = 10\,000 > 4\,000$: l'inégalité est vraie au rang 0 ;
   Hérédité : supposons que pour $n \in \mathbb{N}$, on ait $u_n > 4\,000$, alors par produit par $0,95 > 0$, on a $0,95u_n > 0,95 \times 4\,000$, soit :
   $0,95u_n > 3\,800$, et en ajoutant 200 à chaque membre :
   $0,95u_n + 200 > 3\,800 + 200$, c'est-à-dire $u_{n+1} > 4\,000$: la relation est vraie au rang $n+1$.
   Conclusion : l'inégalité est vraie au rang 0 et si elle est vraie au rang $n \in \mathbb{N}$, elle est vraie au rang $n+1$: d'après le principe de récurrence $u_n > 4\,000$ quel que soit le naturel n.

   (b) On sait que si la suite est décroissante et minorée par 4 000, elle converge vers une limite ℓ, avec $\ell \geqslant 4\,000$.
3. (a) Pour $n = 0$, on a $v_0 = u_0 - 4\,000 = 10\,000 - 4\,000 = 6\,000$.

   (b) Au choix :
   Méthode 1 : pour $n \in \mathbb{N}$, on a :
   $v_{n+1} = u_{n+1} - 4\,000 = 0,95u_n + 200 - 4\,000 = 0,95u_n - 3\,800 = 0,95\left(u_n - \dfrac{3\,800}{0,95}\right) = 0,95\,(u_n - 4\,000) = 0,95v_n$.
   L'égalité $v_{n+1} = 0,95v_n$ vraie quel que soit $n \in \mathbb{N}$ montre que la suite (v_n) est géométrique de raison égale à $0,95$.
   Méthode 2 : pour $n \in \mathbb{N}$, on a vu que $u_n > 4\,000$, donc $v_n = u_n - 4000 > 0$.
   On peut donc calculer : $\dfrac{v_{n+1}}{v_n} = \dfrac{u_{n+1} - 4\,000}{u_n - 4\,000} = \dfrac{0,95u_n + 200 - 4\,000}{u_n - 4\,000} =$
   $\dfrac{0,95u_n - 3\,800}{u_n - 4\,000} = \dfrac{0,95u_n - 3\,800}{u_n - 4\,000} = \dfrac{0,95\left(u_n - \frac{3\,800}{0,95}\right)}{u_n - 4\,000} = \dfrac{0,95\,(u_n - 4\,000)}{u_n - 4\,000} = 0,95.$
   Cette égalité vraie pour tout naturel n, montre que la suite (v_n) est géométrique de raison égale à $0,95$.

   (c) D'après le résultat précédent, on sait que que pour tout $n \in \mathbb{N}$,
   $v_n = v_0 \times 0,95^n = 6\,000 \times 0,95^n$.
   Or $v_n = u_n - 4\,000 \iff u_n = v_n + 4\,000 = 6\,000 \times 0,95^n + 4\,000$.

   (d) Comme $0 < 0,95 < 1$, on sait que $\lim\limits_{n\to+\infty} 0,95^n = 0$, donc $\lim\limits_{n\to+\infty} 6\,000 \times 0,95^n = 0$, d'où $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 4\,000$ (par somme de limites).
4. u_n est égal au nombre d'individus de l'espèce animale au rang n ; d'après le résultat précédent ce nombre va diminuer et se rapprocher de 4 000 soit moins de la moitié de la population initiale : le responsable a raison.