Cours & méthodes

Continuité et TVI

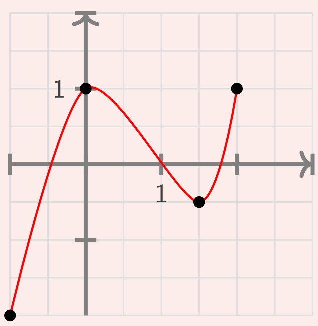
5
ANALYSE

1 Continuité d'une fonction réelle

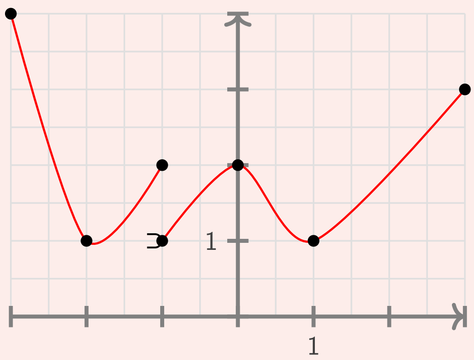
Définition 1 : Définition intuitive

Soit f une fonction définie sur un intervalle I.
On dit que f est *continue* sur I si on peut tracer la courbe représentative de f sur I « *sans lever le crayon* ».

Illustration 1



La fonction représentée est continue sur [-1 ;2]



La fonction représentée n'est pas continue sur[-3 ;3] mais sur [-3 ;-1]

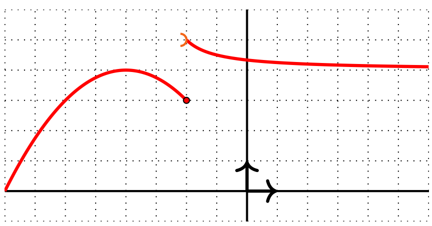
Définition 2 : Continuité

Soit f une fonction définie sur un intervalle I. Soit $a \in I$.

- On dit que f est *continue* en a si f admet une limite en a, par valeurs supérieures et par valeurs inférieures, et que $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \lim\limits_{x\to a^+} f(x) = \lim\limits_{x\to a^-} f(x) = f(a)$
- On dit que f est *continue* sur I si f est continue en tout réel de I.

Méthode 1 : Prouver qu'une fonction est ou non continue en une valeur.

On considère la fonction f dont la courbe représentative $\mathcal{C}_f$ est donnée ci-dessous.



Correction

La fonction f est-elle continue en -2 ?

Méthode 2 : Fonction partie entière

Soit x un réel. La **partie entière** de x, notée $E(x)$, est le plus grand entier relatif, inférieur ou égal à x.

a) Donner les parties entières des nombres suivants : $1,2$; $1,57$; $-2,3$; π ; 3 et -4.

b) Tracer la courbe représentative de la fonction qui à tout réel x associe sa partie entière et étudier la continuité de cette fonction sur $\mathbb{R}$.

Correction

Méthode 3 : Prouver qu'une fonction est ou non continue en une valeur.

On considère la fonction $f : x \mapsto \begin{cases} 2x+9 & \text{si } x < -2 \\ x^2+1 & \text{si } -2 \leqslant x < 3 \\ 4x-4 & \text{si } x \geqslant 3 \end{cases}$ définie sur $\mathbb{R}$.

Déterminer si f est continue sur $\mathbb{R}$.

Correction

Propriété 1 : Pratique !

Toute fonction construite à partir des fonctions polynômes, de la fonction racine carrée, exponentielle, logarithme, sinus, cosinus par addition, multiplication ou composition est continue sur tout intervalle où elle est définie.

Propriété 2 : Propriété fondamentale

Soit f une fonction définie sur un intervalle I. Si f est dérivable sur I, alors f est également continue sur I.

Remarque 1 : Attention !!

La réciproque est fausse. La fonction $x \mapsto |x|$ est continue sur $\mathbb{R}$ mais n'est pas dérivable en 0.

2 Suites et fonction continue

Propriété 3 : Image d'une suite convergente

Soit f une fonction continue sur un intervalle I et (u_n) une suite à valeurs dans I.
Si (u_n) converge vers un réel ℓ, alors la suite $(f(u_n))$ converge vers $f(\ell)$.

Méthode 4

Pour tout entier naturel non nul n, on note $u_n = \sqrt{9+\frac{1}{n}}$.
Déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$.

Correction

Propriété 4 : Théorème du point fixe

Soit I un intervalle, g une fonction définie et continue sur I et (u_n) une suite telle que pour tout entier naturel n, $u_n \in I$ et $u_{n+1} = g(u_n)$.
Si la suite (u_n) est convergente, de limite $l \in I$, alors $g(l) = l$.

Démonstration

Méthode 5 : Déterminer la valeur d'une limite d'une suite avec le théorème du point fixe

On définit la suite (u_n) par $u_0 = 2$ et, pour tout entier n, $u_{n+1} = \sqrt{3u_n + 4}$
Montrer que, pour tout entier naturel n, $2 \leqslant u_n \leqslant 4$.
En déduire que (u_n) converge et déterminer sa limite.

Correction

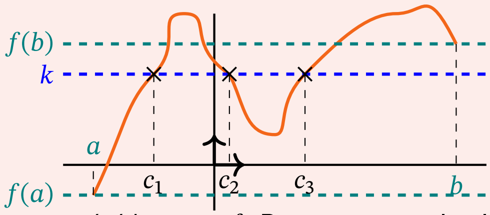
3 Théorème des valeurs intermédiaires

Propriété 5 : Théorème des valeurs intermédiaires

Soit f une fonction **continue** sur un intervalle $[a;b]$ et k un réel compris entre $f(a)$ et $f(b)$.
Alors **il existe** (au moins) un réel c dans $[a;b]$ tel que $f(c) = k$.

Illustration 2

On représente une fonction f ci-contre.



Pour tout réel k compris entre $f(a)$ et $f(b)$, k possède au moins un antécédent par f. Dans cet exemple, il y en a trois. Le nom de ce théorème se justifie ainsi : une fonction continue qui passe d'une valeur $f(a)$ à une valeur $f(b)$ passe forcément au moins une fois par toutes les valeurs intermédiaires.

Méthode 6 : Déterminer qu'une équation possède au moins une solution sur un intervalle.

Prouver que l'équation $x^3 - 3x - 1 = 0$ admet au moins une solution sur l'intervalle $[-2;2]$.

Correction

Remarque 2

Ce théorème ne nous donne aucune indication sur le nombre de ces solutions (en réalité, il y en a 3 sur cet intervalle).

Propriété 6 : Théorème des valeurs intermédiaires avec des limites

Soit f une fonction **continue** sur un intervalle $]a;b[$ telle que $\lim\limits_{x \to a^+} f(x)$ et $\lim\limits_{x \to b^-} f(x)$ existent.
Soit k un réel strictement compris entre ces deux limites.
Alors **il existe** (au moins) un réel c dans $]a;b[$ tel que $f(c) = k$.

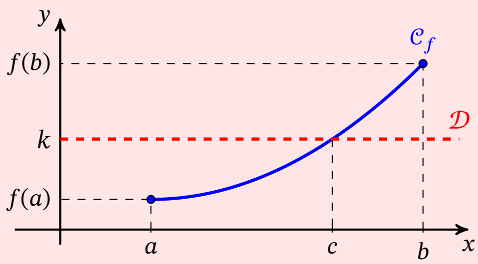
Méthode 7 : Déterminer qu'une équation possède **au moins une** solution sur $\mathbb{R}$.

On considère la fonction $f : x \mapsto 2x^3 + 4x^2 - 5x + 2$, définie sur $\mathbb{R}$.
Démontrer que l'équation $f(x) = 0$ admet au moins une solution dans $\mathbb{R}$.

Correction

Propriété 7 : Corollaire du TVI

Soit f une fonction **continue** et **strictement monotone** sur un intervalle $[a;b]$.
Soit k un réel strictement compris entre $f(a)$ et $f(b)$ (ou les limites en a et b de f).
Alors il existe un **unique** réel $c \in]a;b[$ tel que $f(c) = k$.



Méthode 8 : Déterminer qu'une équation possède **une unique** solution sur un intervalle.

1) Démontrer que l'équation $x^3 - 3x + 1 = 0$ admet une unique solution α dans l'intervalle $[0;1]$.
2) Donner un encadrement de α en procédant à la calculatrice, par « dichotomie » .

Correction

Méthode 9 : Déterminer le nombre de solutions d'une équation et leur valeur approchée respective.

On considère la fonction $f : x \mapsto \dfrac{e^{x-1}}{x}$, définie sur $I =]0;+\infty[$.
Montrer que l'équation $f(x) = 2$ possède exactement deux solutions sur l'intervalle $]0;+\infty[$.
Donner des valeurs approchées à la calculatrice de ces solutions.

Correction