Cours & méthodes

Les bases sur les fonctions
Rappels

2 ANALYSE

1 Généralités sur les fonctions

1.1 Définitions :

Définition 1 : Niveau *

Définir une fonction f sur un ensemble $\mathcal{D}$ de nombres réels, c'est associer à chaque nombre $x \in \mathcal{D}$ un **unique** nombre réel noté $f(x)$. On note : $\begin{array}{l} f : \mathcal{D} \to \mathbb{R} \\ x \mapsto f(x) \end{array}$

- $\mathcal{D}$ est **l'ensemble de définition** de la fonction f. x est la variable.
- Le nombre $f(x)$ est **l'image** du réel x par la fonction f.
- Quand on sait que $f(x) = y$, on dit que x est **un antécédent** de y par la fonction f.

Podcast

Exemple 1 : Fonction racine carrée : Niveau *

f est la fonction définie sur l'intervalle $[0; +\infty[$ par $f(x) = \sqrt{x}$.

- L'ensemble de définition de la fonction f est l'intervalle $[0; +\infty[$.
- L'image de 9 par la fonction f est $f(9) = \sqrt{9} = 3$. On dit aussi que 9 est l'antécédent de 3 par la fonction f.

Définition 2 : Racine d'une fonction : Niveau *

Soit f une fonction définie sur I. On appelle **racine** de f tout réel $x \in I$ vérifiant $f(x) = 0$

Exemple 2 : Niveau *

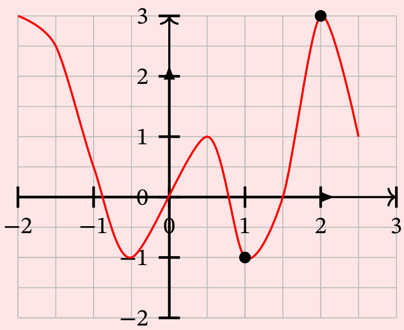
La racine de la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 3x + 1$ est $-\dfrac{1}{3}$ puisque $3x + 1 = 0 \iff x = -\dfrac{1}{3}$

1.2 Représentation graphique d'une fonction

Propriété 1 : Courbe représentative : Niveau *

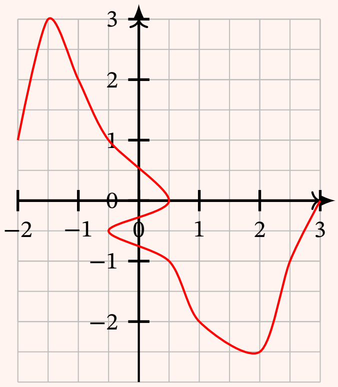
Soit f une fonction définie sur un ensemble $\mathcal{D}$ de nombres réels.
La courbe représentative de la fonction f dans le plan muni d'un repère, est l'ensemble des points $M(x; y)$ du plan tels que $\begin{cases} x \in \mathcal{D} \\ y = f(x) \end{cases}$.

On lit graphiquement que : $f(1) = -1$ et $f(2) = 3$



Remarque 1 : Niveau *

Comme chaque antécédent n'a qu'une seule image par la fonction, il ne peut pas exister deux points de la courbe avec la même abscisse.
Une telle représentation graphique peut exister.
Mais elle n'est pas celle d'une fonction.
Illustration :
Cette courbe n'est pas la représentation graphique d'une fonction. Plusieurs points ont par exemple pour abscisse 0.



1.3 Résolution graphique d'équations et d'inéquations

Propriété 2 : Propriété : Niveau *

Soient C_f la courbe représentative d'une fonction f et m un réel.

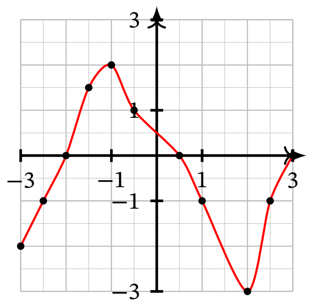
- Les solutions de l'équation $f(x) = m$ sont les abscisses des points de la courbe C_f d'ordonnée m.
- Les solutions de l'inéquation $f(x) < m$ (respectivement $f(x) > m$) sont les abscisses des points de la courbe C_f dont l'ordonnée est inférieure à m (respectivement supérieure à m)

Podcast 2 :

Méthode 1 : Résolution graphique. Niveau *

A partir de la représentation graphique de la fonction f sur $[-3; 3]$, résoudre :

1) $f(x) = -1$
2) $f(x) = 3$
3) $f(x) < 0$



1.4 Variations de fonctions

Définition 3 : Fonction croissante : Niveau *

Dire que la fonction f est croissante sur un intervalle I signifie que pour tous réels x_1 et x_2 de I.

$$\text{Si } x_1 \leqslant x_2 \text{ alors } f(x_1) \leqslant f(x_2)$$

Propriété 3 : Niveau *

Quand une fonction est **croissante** sur un intervalle,
les **antécédents** et les **images** sont rangés dans le même ordre.

Propriété 4 : Fonction décroissante : Niveau *

Dire que la fonction f est décroissante sur un intervalle I signifie que pour tous réels x_1 et x_2 de I.

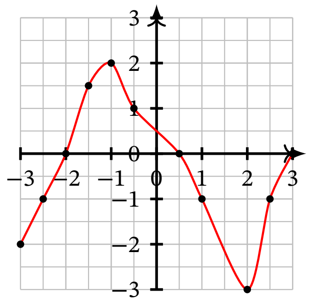
Si $x_1 \leqslant x_2$ alors $f(x_1) \geqslant f(x_2)$

Propriété 5 : A comprendre et retenir ! Niveau *

Quand une fonction est **décroissante** sur un intervalle,
les **antécédents** et les **images** sont rangés dans l'ordre contraire.

Méthode 2 : Tableau de signes et tableau de variations. Niveau *

A partir de la représentation graphique de la fonction f sur $[-3;3]$, dresser son tableau de signes et son tableau de variations.



2 Fonctions de références :

QCM n°1

2.1 Fonctions affines

Définition 4 : Niveau *

Soit a et b deux réels. On appelle fonction affine la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = ax + b.$$

Podcast 3

Définition 5 : Niveau *

On appelle a le **coefficient directeur** et b **l'ordonnée à l'origine**.

Propriété 6 : Proportionnalité des accroissements : Niveau *

f est une fonction affine de la forme $f(x) = ax + b$ si et seulement si, pour tous nombres réels distincts x_1 et x_2, on a :

$$\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = a$$

Propriété 7 : Variations d'une fonction affine : Niveau *

Soient a et b deux réels.

- Si a est positif, la fonction affine f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = ax + b$ est croissante.
- Si a est négatif, la fonction affine f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = ax + b$ est décroissante.

Méthode 3 : Déterminer le sens de variation d'une fonction affine - Niveau *

Déterminer le sens de variations des fonctions f et g définies sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 2x - 3$ etpar $g(x) = -3x + 2$

Correction

QCM n°2

Propriété 8 : Signe d'une fonction affine : Niveau *

Soit f la fonction affine définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = ax + b$ avec $a \neq 0$.

$f(x)$ est du signe de a pour les valeurs de x supérieures à $-\frac{b}{a}$.

Méthode 4 : Déterminer le signe d'une fonction affine - Niveau *

Déterminer le signe des fonctions f et g définies sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 2x - 3$ et par $g(x) = -3x + 2$

Correction

QCM n°3

Définition 6 : Courbe représentative d'une fonction affine : Niveau *

Soit a et b deux réels.

La courbe représentative de la fonction affine f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = ax + b$ est la droite $\mathcal{D}$ d'équation $y = ax + b$.

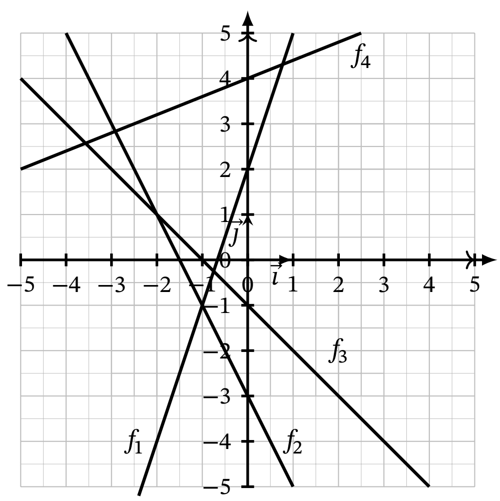
Propriété 9 : Propriétés graphiques d'une fonction affine : Niveau *

Si f est une fonction affine définie par $f(x) = ax + b$:

- a est appelé le **coefficient directeur** de la droite, il mesure sa pente, en positif ou négatif.
- b est appelé **l'ordonnée à l'origine** de la droite. Il mesure « l'étage» où la droite coupe l'axe des ordonnées.

Méthode 5 : Reconnaître l'expression d'une fonction affine à partir de la représentation graphique d'une droite oblique.

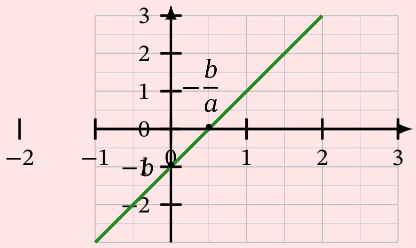
Lire à partir des représentations graphiques ci-contre, l'expression algébrique de chacune des fonctions représentées.



Propriété 10 : Synthèse avec les fonctions affines : Niveau *

$a > 0$

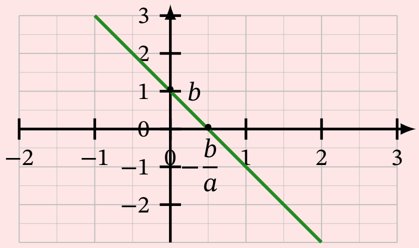
x	$-\infty$	$+\infty$
$ax+b$	$\nearrow$	



x	$-\infty$		$-\dfrac{b}{a}$		$+\infty$
$ax+b$		-	0	+	

$a < 0$

x	$-\infty$	$+\infty$
$ax+b$	$\searrow$	



x	$-\infty$		$-\dfrac{b}{a}$		$+\infty$
$ax+b$		+	0	-	

x	$-\infty$		$-\dfrac{b}{a}$		$+\infty$
$ax+b$		Opposé du signe de a	0	Signe de a	

Méthode 6 : Résoudre une inéquation - Niveau **

Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation

$$(2x+3)^2 \leqslant (3x-1)^2$$

Correction

Méthode 7 : Résoudre une inéquation - Niveau **

Résoudre dans $\mathbb{R}$:

$$\frac{-4x+1}{4+x} \leqslant 0$$

Correction

QCM n°4

2.2 Fonction carré

Propriété 11 : Définition Niveau *

On appelle **fonction carré**, la fonction qui à tout réel x fait correspondre le nombre x^2.

Podcast 4

Propriété 12 : Premières propriétés Niveau *

- Un carré est toujours positif ou nul. Pour tout réel x, on a $x^2 \geqslant 0$.
- Un nombre et son opposé ont le même carré. Pour tout réel x, on a $x^2 = (-x)^2$.
- Comme pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a : $f(x) = f(-x)$, on dit que la fonction f est **paire**.
  Sa représentation graphique admet l'axe des ordonnées comme axe de symétrie.

Propriété 13 : Variations de la fonction carré :Niveau *

La fonction carré définie pour tout réel x par $f(x) = x^2$ est décroissante sur $]-\infty; 0]$ et croissante sur $[0; +\infty[$

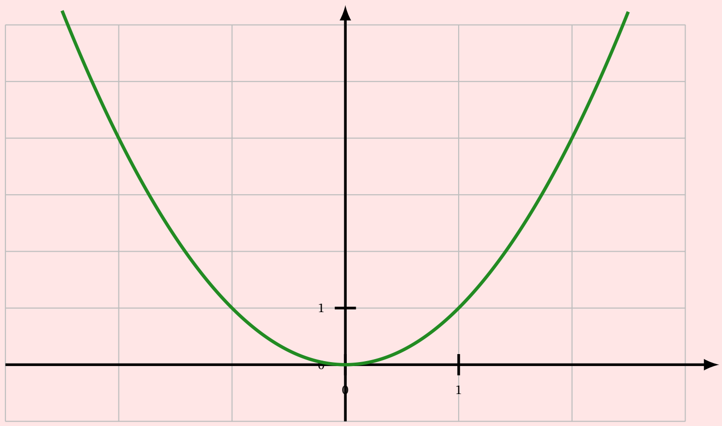
x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f(x) = x^2$		↘	0	↗	

Propriété 14 : Propriété :Niveau **

- Deux nombres négatifs et leurs carrés sont rangés dans l'ordre contraire. Si $a \leqslant b \leqslant 0$ alors $a^2 \geqslant b^2$
- Deux nombres positifs et leurs carrés sont rangés dans le même ordre. Si $0 \leqslant a \leqslant b$ alors $a^2 \leqslant b^2$

Propriété 15 : Courbe représentative : Niveau *

La courbe représentative de la fonction carré f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2$ est la parabole $\mathcal{P}$ d'équation $y = x^2$.



Méthode 8 : Utiliser les variations de la fonction carré - Niveau **

Que dire de x^2, sachant que :

- $2 < x \leqslant 7$
- $-4 \leqslant x < -2$
- $-2 < x \leqslant 3$

Correction

QCM n°5