Cours & méthodes

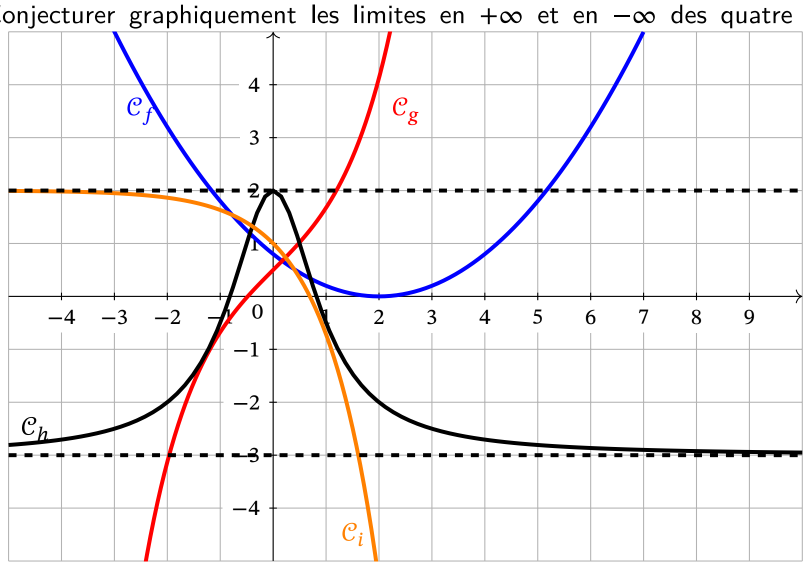
Limites de fonctions

3
ANALYSE

1 Limites finies à l'infini

Activité 1 : Conjecturer des limites finies en $+\infty$

Conjecturer graphiquement les limites en $+\infty$ et en $-\infty$ des quatre fonctions représentées ci-dessous.



Correction

Activité 2 : Animation Géogébra

Déplacez les curseurs rouge des activités Géogébra.
Essayez de compléter la phrase :
"Dire qu'une fonction admet une limite l quand x tend vers $+\infty$ signifie ..."

Activité Géogébra 1 Activité Géogébra 2

1.1 Définition et première propriété :

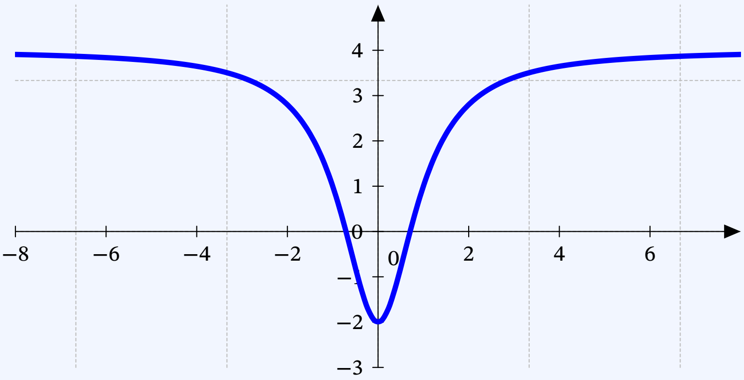
Définition 1 : Notion de limite

Soit f une fonction définie sur un intervale I. Soit $l \in \mathbb{R}$.
On dit que la fonction f admet pour limite l lorsque x tend vers $+\infty$
si $f(x)$ prend des valeurs aussi proches de l que l'on souhaite pourvu qu'on prenne des x assez grand.
On note : $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = l$
On dit aussi que $f(x)$ tend vers l quand x tend vers $+\infty$.

Remarque 1

On peut avoir le même phénomène quand x tend vers $-\infty$ et avoir $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = l$

Exemple 1



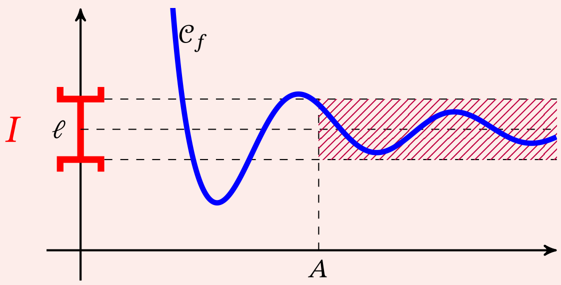
On conjecture ici que la limite en $+\infty$ et en $-\infty$ de la fonction représentée est 4.

On note $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = 4$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 4$

Définition 2 : Définition mathématique

Soit f une fonction définie sur un intervalle $[a;+\infty[$ où $a \in \mathbb{R}$. Soit l un réel.
f admet pour limite l en $+\infty$ si :
Pour tout intervalle ouvert I tel que $l \in I$, il existe un réel A tel que pour tous les réels $x > A$, $f(x) \in I$

Illustration



Quelle que soit l'intervalle ouvert I sur l'axe des ordonnées, on trouvera toujours réel A, tel qu'après cette valeur, toutes les images soient dans l'intervalle.

Définition 3 : Pour les matheux !!

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = l \iff \forall\epsilon > 0, \exists A \in \mathbb{R}, \forall x > A, |f(x)-l| < \epsilon$$

Propriété 1 : Limites finies de fonctions de références :

- $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1}{x} = 0$
- $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{1}{x} = 0$

Plan de Travail

39 p 178 ☐

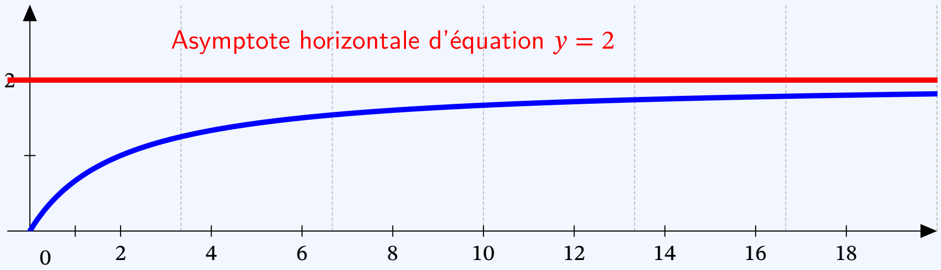
QCM n°1

1.2 Asymptote horizontale

Définition 4 : Asymptote horizontale

Soit $l \in \mathbb{R}$ et soit $\mathcal{C}$ la courbe représentative d'une fonction f dans un repère. On dit que la droite d'équation $y = l$ est **asymptote horizontale** à la courbe $\mathcal{C}$: en $+\infty$, si $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = l$ et en $-\infty$, si $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = l$

Exemple 2



Animation Géogébra

Dans cette situation, on a $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 2$, la courbe admet donc une asymptote horizontale d'équation $y = 2$.

Plan de Travail

19 p 176 ☐ 20 p 176 ☐

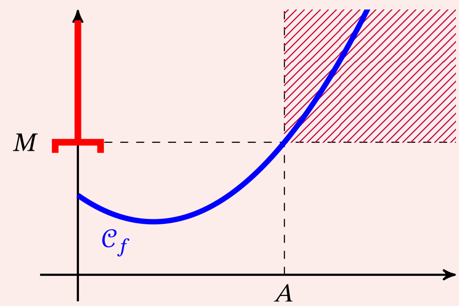
QCM n°2

2 Limites infinies à l'infini

Définition 5 : Limite en $+\infty$

f admet pour limite $+\infty$ en $+\infty$ si pour tout intervalle ouvert $]M;+\infty[$ où M est un réel,
il existe un réel A tel que pour tous les réels x supérieurs à A, $f(x) \in]M;+\infty[$.
On note alors $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$
On dit aussi que :
$f(x)$ tend vers $+\infty$ quand x tend vers $+\infty$.

Illustration



Quel que soit le nombre M, on trouvera toujours un réel A, à partir duquel toutes les images seront strictement supérieures à M.

Définition 6 : Pour les matheux !!

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$$
$$\iff$$
$$\forall M \in \mathbb{R}, \exists A \in \mathbb{R}, \forall x > A, f(x) > M$$

Méthode 1 : Déterminer la limite d'une fonction en $+\infty$

Soit f la fonction définie sur $[0\,;+\infty[$ par $f(x) = (x-1)^2 + 1$.

1) Est-il vrai qu'il existe un réel x_0 tel que, pour tout $x > x_0$, $f(x) > 100$?
2) Démontrer que, pour tout réel $A \geqslant 1$, l'intervalle $]A\,;+\infty[$ contient toutes les valeurs $f(x)$ pour x assez grand.
3) Que peut-on en déduire pour la fonction f ?

Correction

Plan de Travail

38 p 178 ☐

QCM n°3

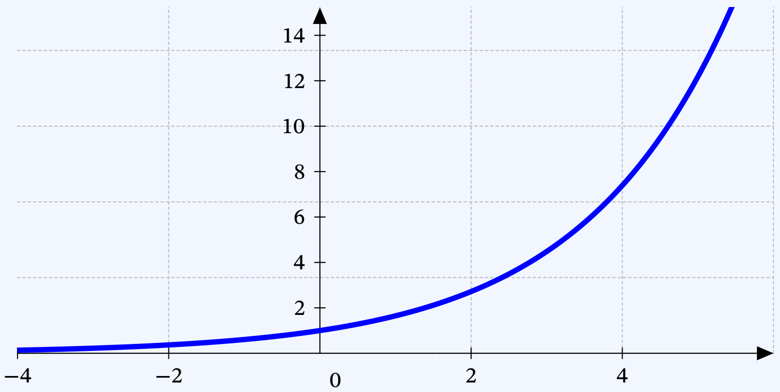
Définition 7 : Limite en $-\infty$

f admet pour limite $-\infty$ en $+\infty$ si pour tout intervalle $]-\infty; M[$ où M est un réel,
il existe un réel A tel que pour tous les réels x inférieurs à A, $f(x) \in]-\infty; M[$
On note alors $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = -\infty$.
On dit aussi que $f(x)$ tend vers $-\infty$ quand x tend vers $+\infty$.

Remarque 2 : idem en $-\infty$

On définit de la même manière $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$.
Il s'agit de la principale différence avec les suites : pour les suites, l'indice n ne pouvait que tendre vers $+\infty$. Dans le cas des fonctions, le réel x peut aller vers $+\infty$ mais aussi $-\infty$ et d'autres valeurs réelles entre les deux, comme nous le verrons plus tard dans ce chapitre...

Exemple 3



On a représenté la fonction exponentielle. On a clairement : $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$

Remarque 3 : Limites et monotonie ne sont, en général, pas liées.

On peut montrer que pour la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f : x \mapsto x + \cos(x)$
on a : $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$ et $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$ mais que cette fonction n'est pourtant pas croissante.
On retient donc qu'une fonction peut tendre vers $+\infty$ sans être forcément croissante.

Propriété 2 : Limites remarquables en $\pm\infty$

Soit n un entier naturel non nul.

$$\lim_{x \to +\infty} x^n = +\infty \qquad \lim_{x \to +\infty} \frac{1}{x^n} = 0$$

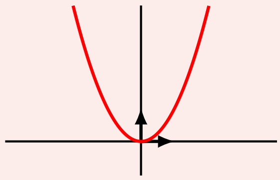
Si n est pair, $\lim\limits_{x \to -\infty} x^n = +\infty$ **Si n est impair,** $\lim\limits_{x \to -\infty} x^n = -\infty$

$$\lim_{x \to +\infty} \sqrt{x} = +\infty \qquad \lim_{x \to +\infty} e^x = +\infty \qquad \lim_{x \to -\infty} e^x = 0$$

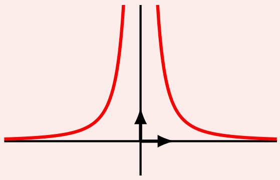
Illustration

Il est important de visualiser les courbes représentatives de ces fonctions.
Celles-ci vous permettront de bien garder ces limites usuelles en tête.

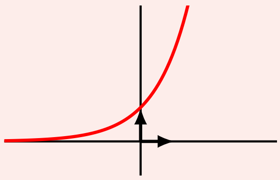
$x \mapsto x^n$, n **pair**



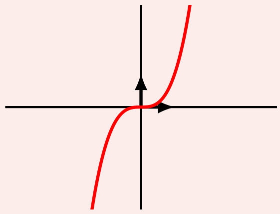
$x \mapsto \frac{1}{x^n}$, n **pair**



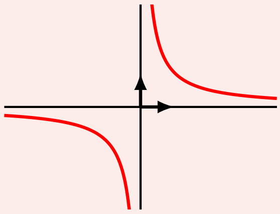
$x \mapsto e^x$



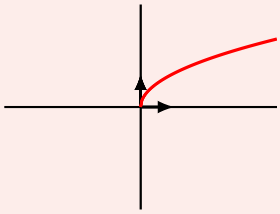
$x \mapsto x^n$, n **impair**



$x \mapsto \frac{1}{x^n}$, n **impair**



$x \mapsto \sqrt{x}$



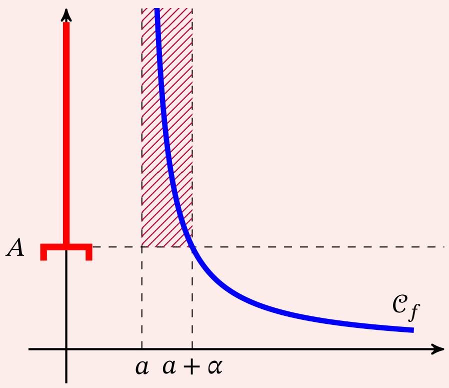
3 Limites en un réel

Définition 8 : $\lim\limits_{x \to a} f(x) = \pm\infty$

Une fonction f a pour limite $+\infty$ en a, si tout intervalle $]M; +\infty[$ contient toutes les valeurs de $f(x)$ pour x assez proche de a. On note alors :

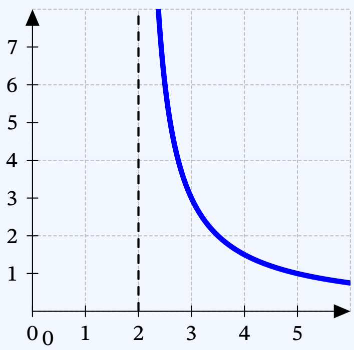
$$\lim_{x \to a} f(x) = +\infty \qquad \text{et de façon analogue} \qquad \lim_{x \to a} f(x) = -\infty$$

Illustration



Cette définition traduit l'idée que les valeurs $f(x)$ finissent, pour des valeurs de x de plus en proches de a, par dépasser n'importe quel réel A, aussi grand soit-il : quel que soit le nombre réel A (aussi « grand » soit-il), il existe un réel $\alpha > 0$ tel que pour tout $x \in]a\,; a+\alpha[$, $f(x) \in]A\,; +\infty[$.

Exemple



Dans cette situation, la fonction étudiée est définie sur $]2; +\infty[$. La fonction tend vers l'infini quand les antécédents se rapprochent de 2. On note : $\lim\limits_{x \to 2} f(x) = +\infty$

Méthode 2 : Déterminer une limite en un réel.

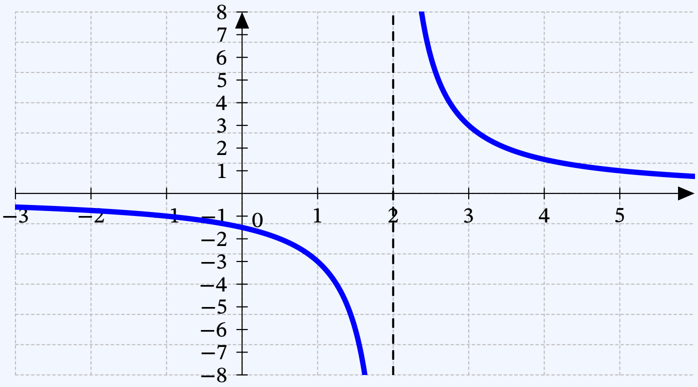
Soit f la fonction définie sur $]0\,;+\infty[$ par $f(x)=\dfrac{1}{x^2}$.

a) Soit A un réel strictement positif. Démontrer que l'intervalle $]A\,;+\infty[$ contient toutes les valeurs $f(x)$ pour x assez proche de 0.

b) En déduire la limite de f en 0.

Correction

Exemple 4 : Limite à gauche et limite à droite



Dans cette situation, la fonction étudiée n'est pas définie en 2 et les limites "à gauche" et "à droite" sont différentes.
Il est impossible de définir $\lim\limits_{x\to -2} f(x)$.
Il faut distinguer la limite quand $x\to -2$ par valeur inférieure, et la limite quand $x\to -2$ par valeur supérieure.

Méthode 3 : Déterminer une limite en un réel.

Soit f la fonction définie sur $]0\,;+\infty[$ par $f(x)=\dfrac{1}{x^2}$.

a) Soit A un réel strictement positif. Démontrer que l'intervalle $]A\,;+\infty[$ contient toutes les valeurs $f(x)$ pour x assez proche de 0.

b) En déduire la limite de f en 0.

Correction

Notations : Limite à gauche et limite à droite

Dans la situation de l'exemple, on note :
$\lim\limits_{\substack{x\to 2\\ x>2}} f(x)$ quand $x\to 2$ par valeur supérieure et $\lim\limits_{\substack{x\to 2\\ x<2}} f(x)$ quand $x\to 2$ par valeur inférieure.
On a donc :

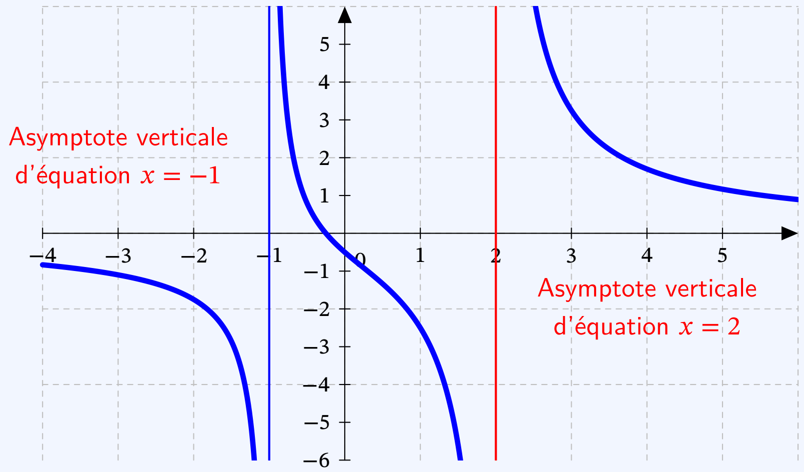
$$\lim_{\substack{x\to 2\\ x<2}} f(x)=-\infty \qquad \text{et} \qquad \lim_{\substack{x\to 2\\ x>2}} f(x)=+\infty$$

3.1 Asymptote verticale :

Définition

Soit a un réel, $\mathcal{C}$ la courbe représentative d'une fonction f dans un repère.
On dit que la droite d'équation $x=a$ est **asymptote verticale** à $\mathcal{C}$ si la limite à droite ou la limite à gauche de f en a est $+\infty$ ou $-\infty$.

Exemple



Dans cette situation, la fonction représentée admet deux asymptotes verticales, d'équation $x = -1$ et $x = 2$

Méthode 4 : Déterminer des équations d'asymptotes

f est une fonction telle que : $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -4$, $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$, $\lim\limits_{\substack{x\to3\\x<3}} f(x) = -\infty$ et $\lim\limits_{\substack{x\to3\\x>3}} f(x) = +\infty$

Déterminer ses éventuelles asymptotes, en donner leur équation.

Correction

Méthode 5

On considère une fonction f dont le tableau de variations est donné ci-dessous.

x	$-\infty$		-3		2		$+\infty$
$f(x)$	$+\infty$	↘	-1	↗	$+\infty$ ‖ $+\infty$	↘	2

Correction

a) Quel est l'ensemble de définition de f ?

b) Quelles sont les limites données dans ce tableau ? Interpréter graphiquement ces résultats.

c) Proposer une courbe pouvant représenter la fonction f.

Plan de Travail

Asymptotes : 17 p 176 ☐ 18 p 176 ☐ 21 p 176 ☐

Limites : 44 p 176 ☐ 46 (1-2-3) p 179 ☐ 48*** p 179 ☐

QCM n°4

4 Opérations sur les limites

Propriété 3 : Comme pour les suites.

Les résultats concernant les opérations sur les limites de suite (somme, produit quotient) sont applicables aux limites de fonctions lorsque x tend vers $+\infty$, $-\infty$ ou un réel a.

On rappelle qu'il y a quatre formes indéterminées qui sont « $\infty - \infty$ », « $0 \times \infty$ », « $\dfrac{\infty}{\infty}$ » et « $\dfrac{0}{0}$ ».

Méthode 6 : Limite en une valeur d'une fonction continue

Calculer $\lim\limits_{x \to 2} x^2 - 3$

Correction

Méthode 7 : Limite d'un polynôme en l'infini

Calculer $\lim\limits_{x \to +\infty} x^3 + 4x^2 + 6x + 2$

Correction

Méthode 8 : Limite d'un polynôme en l'infini

Calculer $\lim\limits_{x \to -\infty} x^3 + 4x^2 + 6x + 2$

Correction

Méthode 9 : Somme de limites

Déterminer la limite en $+\infty$ de la fonction f définie sur $\mathbb{R}^*$ par $f(x) = x + 3 + \dfrac{1}{x}$

Correction

Méthode 10 : Limite d'un quotient

Déterminer la limite en 2, à gauche et à droite, de la fonction définie sur $\mathbb{R} \setminus \{2\}$ par : $f(x) = \dfrac{2x+1}{3x-6}$

Correction

Méthode 11 : Limites aux bornes du domaine

Déterminer les limite aux bornes du domaine de définition de la fonction définie sur $]1;+\infty[$ par : $f(x) = \dfrac{2x-7}{1-x^2}$

Correction

Propriété 4 : Fonction polynôme

Quand x tend vers $+\infty$ ou $-\infty$, un polynôme admet la même limite que son terme de plus haut degré.

Plan de Travail

Calculs de limites : 24 p 177 ☐ 25 p 177 ☐ 27 p 177 ☐ 52 p 180 ☐ 55 p 180 ☐

QCM n°5

5 Composition

Propriété 5 : Composition de fonctions

a, b et c désignent soit des réels, soit $+\infty$, soit $-\infty$. Soient f et g deux fonctions.

$$\text{Si } \begin{cases} \lim\limits_{x\to a} f(x) = b \\ \lim\limits_{X\to b} g(X) = c \end{cases} \quad \text{alors} \quad \lim\limits_{x\to a} g(f(x)) = c.$$

Méthode 12 : Uriliser la composition de fonctions pour déterminer une limite

Calculer $\lim\limits_{x\to-\infty} \sqrt{5-4x}$

Correction

6 Comparaison et limites

Propriété : Théorème de comparaison :

Si f et g sont deux fonctions telles que : Pour x assez grand, $f(x) \geq g(x)$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = +\infty$ Alors $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$

Remarque : La même chose en $-\infty$

Si pour x assez grand, $f(x) \leq g(x)$ et si $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = -\infty$ alors $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$

Méthode 13 : Limite d'un quotient en une valeur

Déterminer la limite en $+\infty$ de la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = x + 3\cos x$

Correction

Propriété : Théorème des gendarmes :

Si f, g et h sont des fonctions et l un nombre réel tel que :

- Pour x assez grand, $g(x) \leq f(x) \leq h(x)$
- $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = l$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} h(x) = l$

Alors $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = l$.

Méthode 14 : Attention aux gendarmes

Déterminer la limite en $+\infty$ de la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = \dfrac{\sin x}{x}$

Correction

Plan de Travail

Théorèmes de comparaisons : 32 p 177 ☐ 77 p 183 ☐

QCM n°6

7 Cas de la fonction exponentielle

Propriété

Limites finies de fonctions de références : $\lim\limits_{x\to+\infty} e^x = +\infty$ $\lim\limits_{x\to-\infty} e^x = 0$

Méthode 15 : On se fait une expo ?

Calculer a) $\lim\limits_{x\to+\infty} (2x-3)(\mathrm{e}^x-1)$ b) $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\mathrm{e}^x-1}{\mathrm{e}^x+1}$ c) $\lim\limits_{x\to-\infty} \mathrm{e}^{2-3x}$

Correction

Propriété

Propriété des croissances comparées :

- $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{e^x}{x} = +\infty$
- $\lim\limits_{x\to-\infty} xe^x = 0$
- $\lim\limits_{x\to0} \dfrac{e^x-1}{x} = 1$

Remarque

Pour tout entier naturel k non nul, $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{e^x}{x^k} = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} x^k e^x = 0$

Méthode 16 : C'est qui le plus costaud ??

On retient que la fonction exponentielle croît en $+\infty$ bien plus vite que toute fonction puissance.

Calculer a) $\lim\limits_{x \to +\infty} e^x - 5x^2$ b) $\lim\limits_{x \to -\infty} (-x^2+1)e^x$ c) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x^2-3}{e^x}$

Correction

Plan de Travail

Exponentielle : 31 p 177 ☐ 33 p 177 ☐ 86 p 177 ☐

Synthèse : 87 p 184 ☐ 88 p 184 ☐ 89 p 184 ☐ 90 p 184 ☐ 91 p 184 ☐

Prépa Bac : 106 p 189 ☐ 107 p 189 ☐

QCM n°7