Vrai/Faux : type Bac — Terminale Spé Maths

27 septembre 2024

Exercice 1

On considère une suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ de termes non nuls.

Soit (v_n) la suite définie sur $\mathbb{N}$ par $v_n = -\dfrac{2}{u_n}$.

Les affirmations suivantes sont-elles vraies ou fausses ?

1. « Si (u_n) est convergente, alors (v_n) est convergente. »
2. « Si (u_n) est minorée par 2, alors (v_n) est minorée par -1. »
3. « Si (u_n) est décroissante, alors (v_n) est croissante. »
4. « Si (u_n) est divergente, alors (v_n) converge vers 0. »

Corrigé de l'exercice

1. **Faux.**
   Si $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = 0$, alors $\lim\limits_{n\to\infty} v_n = \pm\infty$
2. **Vrai.**
   $\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n \geq 2 \quad \Longleftrightarrow \quad 0 < \dfrac{1}{u_n} \leq \dfrac{1}{2} \quad \Rightarrow \quad -1 \leq -\dfrac{2}{u_n} < 0 \quad \Longleftrightarrow \quad v_n \geq -1.$
3. **Faux.** Si (u_n) décroissante, alors $\forall n \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned} & u_n > u_{n+1} \\ \Longleftrightarrow\ & \frac{2}{u_n} < \frac{2}{u_{n+1}} \\ \Longleftrightarrow\ & -\frac{2}{u_n} > -\frac{2}{u_{n+1}} \\ \Longleftrightarrow\ & v_n > v_{n+1} \end{aligned}$$

   Donc (v_n) décroissante
4. **Faux.** La suite (u_n) peut diverger sans limite. Contre-exemple :
   $u_n = cos(n)$, la suite (u_n) diverge, et la suite (v_n) diverge aussi.