Question flash du lundi

Montrer que, pour tout entier naturel n non nul,

$$1+5+9+\cdots+(4n-3)=\frac{n(4n-2)}{2}$$

On considère la propriété $P(n) : 1+5+9+\cdots+(4n-3) = \frac{n(4n-2)}{2}$.

- **Initialisation**.
  Pour $n_0 = 1$:
  le premier membre de l'égalité à démontrer vaut 1 ;
  le second membre de l'égalité à démontrer vaut $\frac{1(4\times1-2)}{2}$ soit $\dfrac{2}{2}$, et donc 1.
  On en déduit que $P(1)$ est vraie.
- **Hérédité**.
  On considère un **entier** quelconque $k \geq 1$.
  On suppose que $P(k)$ est vraie, c'est-à-dire que :
  $$1+5+9+\cdots+(4k-3) = \frac{k(4k-2)}{2}.$$
  C'est l'hypothèse de récurrence.
  On veut montrer que $P(k+1)$ est vraie, c'est-à-dire :
  $$1+5+9+\cdots+[(4(k+1)-3)] = \frac{(k+1)[4(k+1)-2]}{2}.$$
  <u>Démonstration :</u>
  On a :
  $$\begin{aligned}1+5+9+\cdots+[4(k+1)-3] &= 1+5+9+\cdots+(4k-3)+[4(k+1)-3]\\ &= \frac{k(4k-2)}{2}+[4(k+1)-3]\\ &= \frac{k(4k-2)}{2}+\frac{8k+2}{2}\\ &= \frac{4k^2-2k+8k+2}{2}\\ &= 2k^2+3k+1\end{aligned}$$
  Or, en développant on prouve que :
  $$\begin{aligned}\frac{(k+1)[4(k+1)-2]}{2} &= \frac{(k+1)(4k+2)}{2}\\ &= \frac{4k^2+6k+2}{2}\\ &= 2k^2+3k+1.\end{aligned}$$
  On peut donc dire que $1+5+9+\cdots+[4(k+1)-3] = \dfrac{(k+1)[4(k+1)-2]}{2}$,
  et donc que $P(k+1)$ est vraie.
  La propriété $P(n)$ est donc héréditaire.
- **Conclusion**.
  La propriété $P(n)$ est initialisée au rang 1 et héréditaire. On en déduit que $P(n)$ est vraie pour tout entier $n \geq 1$.
  Donc :
  $$1+5+9+\cdots+(4n-3) = \frac{n(4n-2)}{2}, \text{ pour tout entier naturel } n \text{ non nul.}$$