Limites de suites (complément) Terminale Spé Maths

Exercice 1

Déterminer la limite de la suite (u_n) dans les cas suivants :

1. $u_n = \dfrac{10n-3}{n^2-2}$
2. $u_n = \dfrac{2n^2-1}{3n+2}$
3. $u_n = \dfrac{3n^2-4}{n+1} - 3n$
4. $u_n = \dfrac{\cos(2n)}{\sqrt{n}}$, $n \in \mathbb{N}^*$
5. $u_n = n^2 - 4(-1)^n$
6. $u_n = n + 1 - \cos n$
7. $u_n = \dfrac{n+(-1)^n}{n^2-1} - 2, \quad n \geq 2$

Corrigé de l'exercice

1. **Suite** $u_n = \dfrac{10n-3}{n^2-2}$
   Calcul de la limite : On observe une FI : $\dfrac{\infty}{\infty}$
   Pour lever l'indétermination, nous allons factoriser par le terme de plus haut degré :

$$\begin{aligned} u_n &= \frac{10n-3}{n^2-2} \\ &= \frac{n(10-\frac{3}{n})}{n^2(1-\frac{2}{n^2})} \\ &= \frac{10-\frac{3}{n}}{n(1-\frac{2}{n^2})} \end{aligned}$$

   Par somme de limites, on a : $\lim\limits_{n\to+\infty}(10-\frac{3}{n}) = 10$ et $\lim\limits_{n\to+\infty}(1-\frac{2}{n^2}) = 1$.
   Par produit, $\lim\limits_{n\to+\infty} n(1-\frac{2}{n^2}) = +\infty$.

   Conclusion : Par quotient de limites, on obtient $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$.

2. **Suite** $u_n = \dfrac{2n^2-1}{3n+2}$
   On observe une FI : $\dfrac{\infty}{\infty}$
   Pour lever l'indétermination, nous allons factoriser par le terme de plus haut degré :
   Calcul de la limite :

$$\begin{aligned} u_n &= \frac{2n^2-1}{3n+2} \\ &= \frac{2n^2(1-\frac{1}{2n^2})}{n(3+\frac{2}{n})} \\ &= \frac{2n(1-\frac{1}{2n^2})}{3+\frac{2}{n}} \end{aligned}$$

   Par somme de limites, on a : $\lim\limits_{n\to+\infty}(1-\frac{1}{2n^2}) = 1$ et par produit, $\lim\limits_{n\to+\infty} 2n(1-\frac{1}{2n^2}) = +\infty$.
   Par somme de limites, on a : $\lim\limits_{n\to+\infty}(3+\frac{2}{n}) = 3$
   Conclusion : Par quotient de limites, on obtient $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \infty$.

3. **Suite** $u_n = \dfrac{3n^2-4}{n+1} - 3n$
   On observe une FI : $\infty - \infty$

Pour lever l'indétermination, nous allons d'abord mettre au même dénominateur :

$$\begin{aligned} u_n &= \frac{3n^2 - 4 - 3n(n+1)}{n+1} \\ &= \frac{3n^2 - 4 - 3n^2 - 3n}{n+1} \\ &= \frac{3n^2 - 3n^2 - 3n - 4}{n+1} \\ &= \frac{-3n-4}{n+1}. \end{aligned}$$

On simplifie l'expression en factorisant par n au numérateur et au dénominateur :

$$\begin{aligned} u_n &= \frac{n(-3 - \frac{4}{n})}{n(1 + \frac{1}{n})} \\ &= \frac{-3 - \frac{4}{n}}{1 + \frac{1}{n}}. \end{aligned}$$

Par somme de limites, on a : $\lim\limits_{n\to+\infty} (-3 - \frac{4}{n}) = -3$

Par somme de limites, on a : $\lim\limits_{n\to+\infty} (1 + \frac{1}{n}) = 1$

Conclusion :

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = -3.$$

4. **Suite** $u_n = \dfrac{\cos(2n)}{\sqrt{n}}$, $n \in \mathbb{N}^*$

   Calcul de la limite :

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = \lim_{n\to+\infty} \frac{\cos(2n)}{\sqrt{n}}.$$

$\forall n \in \mathbb{N}$:

$$\begin{aligned} & -1 \leqslant \cos(2n) \leqslant 1 \\ \iff & \frac{-1}{\sqrt{n}} \leqslant \frac{\cos(2n)}{\sqrt{n}} \leqslant \frac{1}{\sqrt{n}} \\ \text{or } & \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} = 0 \end{aligned}$$

d'après le théorème des gendarmes : $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$.

5. **Suite** $u_n = n^2 - 4(-1)^n$

   Calcul de la limite : $\forall n \in \mathbb{N}$: $u_n = n^2 - 4(-1)^n \geqslant n^2 - 4$

   or $\lim\limits_{n\to+\infty} n^2 - 4 = +\infty$.

   Avec le théorème de comparaison, $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(n^2 - 4(-1)^n\right) = +\infty$

6. **Suite** $u_n = n + 1 - \cos n$

   Calcul de la limite : $\forall n \in \mathbb{N}$: $u_n = n + 1 - \cos n \geqslant n$

   or $\lim\limits_{n\to+\infty} n = +\infty$.

   Avec le théorème de comparaison, $\lim\limits_{n\to+\infty} (n + 1 - \cos n) = +\infty$

$$
\begin{aligned}
\lim_{n\to+\infty} u_n &= \lim_{n\to+\infty} (n+1-\cos n)\\
&= \infty.
\end{aligned}
$$

Conclusion : La suite diverge vers $+\infty$ car $n \to +\infty$ et $\cos n$ est borné.

7. **Suite** $u_n = \dfrac{n+(-1)^n}{n^2-1} - 2, \quad n \geq 2$

   Calcul de la limite :

$$
\begin{aligned}
& -1 \leqslant (-1)^n \leqslant 1\\
\Longleftrightarrow\ & n-1 \leqslant n+(-1)^n \leqslant n+1\\
\Longleftrightarrow\ & \frac{n-1}{n^2-1} \leqslant \frac{n+(-1)^n}{n^2-1} \leqslant \frac{n+1}{n^2-1}\\
\Longleftrightarrow\ & \frac{n-1}{(n-1)(n+1)} \leqslant \frac{n+(-1)^n}{n^2-1} \leqslant \frac{n+1}{(n-1)(n+1)}\\
\Longleftrightarrow\ & \frac{1}{n+1} \leqslant \frac{n+(-1)^n}{n^2-1} \leqslant \frac{1}{n-1}
\end{aligned}
$$

or $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{n-1} = \lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{n+1} = 0$

Donc avec le théorème des gendarmes,

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{n+(-1)^n}{n^2-1} = 0$$

Par somme,

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{n+(-1)^n}{n^2-1} - 2 = -2$$

Conclusion :

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = -2$$