Cours & méthodes

Les puissances

2
Calcul Numérique

1 Généralités sur les puissances

1.1 Définition

Propriété 1 : Définition : Niveau *

Soit $a \in \mathbb{R}$ (c'est-à-dire que a est un nombre quelconque)
et $n \in \mathbb{N}^*$, c'est-à-dire que n est un entier naturel différent de zéro.
Le nombre a, à la puissance n (on dit aussi " a exposant n") est défini par :

$$a^n = \underbrace{a \times a \times \cdots \times a}_{n \text{ fois}}$$

En Vidéo

Méthode 1 : Connaître la définition d'une puissance : Niveau *

Calculer de tête les nombres suivants :
$A = 3^2$; $B = (-4)^2$; $C = -4^2$

Correction

Remarque 1 : Attention : Niveau *

On observera bien la différence entre les exemples B et C, en respectant les priorités de calculs.
L'exposant est prioritaire sur le signe - dans le C.

Cas particulier 1 : Cas où $n = 0$ ou $n = 1$: Niveau *

Pour tout nombre a, et pour tout nombre $b \neq 0$, on a :

$$b^0 = 1 \qquad a^1 = a$$

Exemple 1 : Niveau *

$$A = 3^1 = 3 \qquad B = 8^0 = 1$$

Remarque 2 : Attention :

0^0 n'existe pas !

1.2 Généralisation : Découverte des exposants négatifs

Introduction : Étape 1 Niveau *

On comprend assez facilement l'algorithme des puissances :

En multipliant à chaque fois par le même nombre, l'exposant augmente de 1 à chaque étape.

$$\begin{tikzcd}
3^1 \arrow[r, bend left, "\times 3"] \arrow[r, bend right, "\boxed{\text{exposant } +1}"'] & 3^2 \arrow[r, bend left, "\times 3"] \arrow[r, bend right, "\boxed{\text{exposant } +1}"'] & 3^3 \arrow[r, bend left, "\times 3"] \arrow[r, bend right, "\boxed{\text{exposant } +1}"'] & 3^4
\end{tikzcd}$$

Introduction : Étape 2 Niveau *

Essayons de remonter cet algorithme vers la gauche :

En divisant à chaque fois par le même nombre, l'exposant baisse de 1 à chaque étape.

$$\begin{tikzcd}
3^1 & 3^2 \arrow[l, bend right, "\div 3"'] \arrow[l, bend left, "\boxed{\text{exposant } -1}"] & 3^3 \arrow[l, bend right, "\div 3"'] \arrow[l, bend left, "\boxed{\text{exposant } -1}"] & 3^4 \arrow[l, bend right, "\div 3"'] \arrow[l, bend left, "\boxed{\text{exposant } -1}"]
\end{tikzcd}$$

Introduction : Étape 3 : Niveau *

Poursuivons "à contre courant", vers la gauche.

On va définir naturellement les exposants négatifs :

En poursuivant la suite décroissante des exposants, on invente les exposants négatifs :

$$\begin{tikzcd}
\boxed{3^{-2}} & \boxed{3^{-1}} \arrow[l, bend right, "\div 3"'] \arrow[l, bend left, "\boxed{\text{exposant } -1}"] & 3^0 \arrow[l, bend right, "\div 3"'] \arrow[l, bend left, "\boxed{\text{exposant } -1}"] & 3^1 \arrow[l, bend right, "\div 3"'] \arrow[l, bend left, "\boxed{\text{exposant } -1}"] & 3^2 \arrow[l, bend right, "\div 3"'] \arrow[l, bend left, "\boxed{\text{exposant } -1}"]
\end{tikzcd}$$

Introduction : Étape 4 : Niveau *

En poursuivant cet algorithme vers la gauche, on va définir naturellement les exposants négatifs :

En divisant à chaque fois par 3, on arrive à calculer la valeur des nombres à exposants négatifs.

$$\begin{tikzcd}
3^{-2} & 3^{-1} \arrow[l, bend right, "\div 3"'] & 3^0 \arrow[l, bend right, "\div 3"'] & 3^1 \arrow[l, bend right, "\div 3"'] & 3^2 \arrow[l, bend right, "\div 3"'] \\
\frac{1}{9} & \frac{1}{3} & 1 & 3 & 9 \\
\boxed{\frac{1}{3^2}} & \boxed{\frac{1}{3^1}} & \boxed{3^0} & \boxed{3^1} & \boxed{3^2}
\end{tikzcd}$$

Notations 1 : Exposant négatif Niveau **

On accepte donc d'écrire : $3^{-2} = \dfrac{1}{3^2}$; $3^{-1} = \dfrac{1}{3^1}$

Définition 1 : Niveau **

Pour tout nombre a, et pour tout entier non-nul n, on convient que :

$$a^{-n} = \frac{1}{a^n}$$

Méthode 2 : Connaître la définition d'une puissance : Niveau *

Calculer de tête les nombres suivants.

1) $(-2)^{-6} =$ 3) $(-2)^2 =$ 5) $-2^7 =$

2) $(-3)^{-3} =$ 4) $11^0 =$

Correction

S'évaluer

QCM n°1 :

2 Puissances de 10

2.1 Généralités :

Propriété 2 : Niveau *

On a en particulier avec $n \in \mathbb{N}^*$:

$$10^n = \underbrace{10 \times 10 \times \cdots \times 10}_{n \text{ fois}} = 1\underbrace{0...0}_{n \text{ zéros}} \qquad 10^{-n} = \frac{1}{10^n} = \underbrace{0,00 \cdots \times 0}_{n \text{ zéros}}1$$

Exemple 2 : Niveau *

Exemples :

$$10^2 = 100 \;;\; 10^3 = 1000 \quad \text{et} \quad 10^{-2} = \frac{1}{10^2} = 0,01 \;;\; 10^{-3} = \frac{1}{10^3} = 0,001$$

Remarque 3 : Bien pratique en physique ! Niveau *

Les puissances de 10 donnent de nombreuses situations d'utilisation de ces notations.

- En chimie :
  Le diamètre du noyau de l'atome d'hydrogène mesure $0,0000000000000024$ m.
  Il est clairement plus simple de l'écrire : $2,4 \times 10^{-15}$ m.
- En astronomie :
  On estime la masse du soleil assez proche de $2000000000000000000000000000000$ Kg.
  Il est plus facile de manipuler cette donnée ainsi : 2×10^{30} Kg.

Notations 2 : Les physiciens... Niveau **

Dans leurs notations, les physiciens ont pris l'habitude de remplacer le symbole $\times$ par un .

Ils écrivent souvent $2,4 \,.\, 10^{-15}$ et $2 \,.\, 10^{30}$.

2.2 Les préfixes

Définition 2 : Niveau *

Pour adapter les unités des grandeurs que l'on mesure, aux puissances de 10, les physiciens, chimistes, biologistes, économistes, etc., ont souvent recours aux préfixes :

10^6	10^5	10^4	10^3	10^2	10^1	10^0	10^{-1}	10^{-2}	10^{-3}	10^{-4}	10^{-5}	10^{-6}
Mega			kilo	hecto	déca		déci	centi	milli			micro

On pourra utiliser aussi : 10^9 pour **giga** noté G et 10^{12} pour **téra** noté T
ou pour l'infiniment petit : 10^{-9} pour **nano** noté n et 10^{-12} pour **pico** noté p

Exemple 3 : Niveau *

Pour des tailles de fichiers par exemple :

5ko pour dire 53000 octets $= 5 \times 10^3$ octets.

5Mo pour dire 5000000 octets $= 5 \times 10^6$ octets.

5Go pour dire 5000000000 octets $= 5 \times 10^{12}$ octets.

5To pour dire 5000000000000 octets $= 5 \times 10^{15}$ octets.

Méthode 3 : Connaître les préfixes : Niveau *

Calculer de tête les nombres suivants.

1) $7{,}1 \times 10^{16}$ Wh $= 7{,}1 \times 10^{\cdots}$ MWh

2) $87{,}76 \times 10^9$ km $= 87{,}76 \times 10^{\cdots}$ m

3) $430{,}1 \times 10^{11}$ MWh $= 430{,}1 \times 10^{\cdots}$ TWh

Correction

2.3 Les erreurs classiques à éviter :

Remarque 4 : Le double n'est pas le carré ! Niveau *

$$3^2 = \ldots\ldots\ldots \qquad 3 \times 2 = \ldots$$

$$3^2 \neq 3 \times 2$$

Erreur classique de l'élève qui va trop vite et confond les opérations.

Remarque 5 : Attention au signe ! Niveau *

La puissance agit uniquement sur le nombre juste devant l'exposant ou entre parenthèses.

$$-2^2 = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \qquad (-2)^2 = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Attention à cette confusion de signe très fréquente !

Remarque 6 : Priorité de la puissance ! Niveau *

La puissance est toujours prioritaire sur les 4 autres opérations de base.

$$2 \times 4^2 = \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \qquad (2 \times 4)^2 = \dots\dots\dots$$

Donc :

$$2 \times 4^2 \neq (2 \times 4)^2$$

Remarque 7 : Priorité des parenthèses ! Niveau *

$$(5+3)^2 = \dots\dots\dots\dots\dots\dots \qquad 5+3^2 = \dots\dots\dots\dots\dots$$

Donc :

$$5+3^2 \neq (5+3)^{2!}$$

S'évaluer

QCM n°2 :

3 Propriétés calculatoires :

3.1 Produit et quotient d'un même réel avec des exposants différentes.

Activité : Produit de puissances : Niveau *

Avec les définitions du cours, on a :

$$4^3 \times 4^7 = \underbrace{4 \times 4 \times 4}_{4^3} \times \underbrace{4 \times 4 \times 4 \times 4 \times 4 \times 4 \times 4}_{4^7} = 4^{7+3} = 4^{10}$$

Pour $a \in \mathbb{R}$, on peut faire le même calcul en remplaçant 4 par a :

$$a^3 \times a^7 = \underbrace{a \times a \times a}_{a^3} \times \underbrace{a \times a \times a \times a \times a \times a \times a}_{a^7} = a^{7+3} = a^{10}$$

Pour $n \in \mathbb{N}$, on peut faire le même calcul en remplaçant 3 par n :

$$a^n \times a^7 = \underbrace{a \times a \dots \times a}_{n \text{ fois}} \times \underbrace{a \times a \times a \times a \times a \times a \times a}_{a^7} = a^{n+7}$$

Pour $m \in \mathbb{N}$, on peut faire le même calcul en remplaçant 7 par m :

$$a^n \times a^m = \underbrace{a \times a \dots \times a}_{n \text{ fois}} \times \underbrace{a \times a \dots \times a}_{m \text{ fois}} = a^{n+m}$$

Activité : Quotient de puissances : Niveau *

Avec les définitions du cours, on a : $\dfrac{4^3}{4^7} = \dfrac{\overbrace{4 \times 4 \times 4}^{4^3}}{\underbrace{4 \times 4 \times 4 \times 4 \times 4 \times 4 \times 4}_{4^7}} = \dfrac{1}{4 \times 4 \times 4 \times 4} = 4^{-4} = 4^{3-7}$

Propriété 3 : Niveau *

Soit a un nombre réel non-nul ; n et m deux entiers naturels.

$$a^n \times a^m = a^{n+m} \qquad \frac{a^n}{a^m} = a^{n-m}$$

En Vidéo

Méthode 4 : Appliquer les propriétés calculatoires du proquit et quotients de puissances : Niveau *

Simplifier les nombres suivants.

1) $A = \dfrac{(-9)^3}{(-9)^5}$

2) $B = (-8)^3 \times (-8)^5$

Correction

3.2 Puissances de puissances :

Activité 1 : Puissances de puissances : Niveau *

Avec les définitions du cours, on a :

$$\left(4^3\right)^2 = 4^3 \times 4^3 = 4^{3+3} = 4^6 = 4^{3\times 2}$$

Pour $a \in \mathbb{R}$, on peut faire le même calcul en remplaçant 4 par a :

$$\left(a^3\right)^2 = a^3 \times a^3 = a^{3+3} = a^6 = a^{3\times 2}$$

Pour $n \in \mathbb{N}$, et $m \in \mathbb{N}$, on peut faire le même calcul en remplaçant 3 par n et 2 par m :

$$(a^n)^m = \underbrace{a^n \times \ldots \times a^n}_{m \text{ fois}} = a^{\overbrace{n+\ldots+n}^{m \text{ fois}}} = a^{n\times m}$$

Propriété 4 : Propriété Niveau **

Soit $a \in \mathbb{R}$; $n \in \mathbb{N}$ et $m \in \mathbb{N}$

$$(a^n)^m = a^{nm}$$

Méthode 5 : Appliquer les propriétés calculatoires du proquit et quotients de puissances : Niveau *

Simplifier les nombres suivants.

1) $A = (5^3)^3$

2) $B = ((-9)^2)^4$

Correction

3.3 Produit de deux réels distincts à la même puissance :

Activité 2 : Niveau *

Avec les définitions du cours, on a :

$$5^3 \times 2^3 = \underbrace{5 \times 5 \times 5}_{5^3} \times \underbrace{2 \times 2 \times 2}_{2^3} = (5 \times 2) \times (5 \times 2) \times (5 \times 2) = (5 \times 2)^3 = 10^3$$

Pour $a \in \mathbb{R}$, $b \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}$, on peut faire le même calcul en remplaçant 4 par a, 2 par b et 3 par n :

$$a^n \times b^n = \underbrace{a \times \ldots \times a}_{n \text{ fois}} \times \underbrace{b \times \ldots \times b}_{n \text{ fois}} = \underbrace{(a \times b) \ldots \times (a \times b)}_{n \text{ fois}} = (ab)^n$$

On a la même propriété avec le quotient.

Propriété 5 : Propriété Niveau **

Soit $a \in \mathbb{R}$; $b \in \mathbb{R}^*$ et $n \in \mathbb{N}$:

$$a^n \times b^n = (ab)^n \qquad \frac{a^n}{b^n} = \left(\frac{a}{b}\right)^n$$

Méthode 6 : Appliquer les propriétés calculatoires du proquit et quotients de puissances : Niveau *

Écrire sous la forme a^n

$A = 5^2 \times 8^2$

Correction

3.4 Les erreurs classiques à éviter :

Remarque 8 : Confondre les priorités : Niveau **

$$10^2 + 10^3 \ldots \ldots 10^5$$

Il n'y a pas de propriétés avec les sommes de puissances !

$$10^2 + 10^3 = 100 + 1000 = 1100 \qquad 10^5 = 100000$$

Outre l'erreur de calcul, l'ordre de grandeur des deux résultats est sensiblement différent.
Mettez donc du sens à vos calculs, analysez les opérations en présence, avant d'appliquer des propriétés dans

des contextes où elles ne fonctionnent pas.

Remarque 9 : Mal appliquer les propriétés : Niveau **

$$3^2 \times 4^3 \ldots \ldots q12^5$$

$$3^2 \times 4^3 = 3 \times 3 \times 4 \times 4 \times 4 = 576 \qquad 12^5 = 12 \times 12 \times 12 \times 12 \times 12 = 248832$$

Comme dans le cas précédent, le calcul de droite est bien supérieur à celui de gauche.
Imaginez que vous parliez en euros, l'ordre de grandeur est très différent !!

Remarque 10 : Comment s'y retrouver ? Niveau **

Pour appliquer les formules avec les puissances, il faut outre une multiplication, qu'un élément soit commun aux deux facteurs :

$$3^2 \times 3^4 = \ldots \ldots$$

Le nombre 3 est dans chaque facteur, on peut ajouter les exposants.

$$3^2 \times 4^2 = \ldots \ldots$$

L'exposant 2 est le même, il ne change pas, on peut multiplier 3×2.

Méthode 7 : : Niveau *

Calculer le plus simplement, sans utiliser la calculatrice :

$A = 2^3 \times 2^4$ $\qquad B = 10^3 \times 10^{-4}$ $\qquad C = x^2 \times x^3$ $\qquad D = \left(2^3\right)^4$

Correction

Méthode 8 : : Niveau *

Calculer le plus simplement, sans utiliser la calculatrice :

$E = \left(10^3\right)^{-4}$ $\qquad F = \left(x^2\right)^3$ $\qquad H = \dfrac{10^3}{10^{-2}}$ $\qquad I = \dfrac{x^3}{x^1}$

Correction

Méthode 9 : : Niveau *

$J = (5 \times 3)^2$ $K = 5^5 \times 2^5$ $L = (3x)^2$ $M = (-2x)^3$

Correction

Méthode 10 : : Niveau *

Écrire sous la forme a^n : $\dfrac{2^6 \times 8}{2^3}$

Correction

S'évaluer

QCM n°3 :

Méthode 11 : : Niveau **

Calculer

1) $A = 5 \times ((-2)^2 + 3 \times (-2))$
2) $B = (-1)^2 \times (-2 - 5)$

Correction

Méthode 12 : : Niveau **

Commencer par regrouper les facteurs communs ou en faire apparaître.

Calculer A et B sous la forme d'un produit de puissances de 2, de 3 et de 5.

$$A = \frac{5^8 \times 10^{-7} \times 3^9}{10^{-5} \times 3^7 \times 5^{10}}$$

$$B = \frac{(-6)^3 \times 15^4 \times (-16)^3}{25 \times 12^5}$$

Correction

Méthode 13 : : Niveau **

Les mêmes propriétés s'appliquent au calcul littéral.

Soient a et b deux réels non nuls, simplifier :

$C = \dfrac{ab^6}{(ab)^4}$

$D = \left(\dfrac{a^2}{a \times b^3}\right)^4 \times b$

Correction

4 Notation scientifique :

Activité : Niveau *

S'il est pratique d'écrire des nombres avec les puissances de 10, il se pose un problème d'homogénéité de ces écritures :
Le nombre 321000 peut se noter par exemple :

$$321000 = 3210 \times 10^2 = 321 \times 10^3 = 32,1 \times 10^4 = 3,21 \times 10^5 = 0,321 \times 10^6$$

De même, le nombre $0,00345$ peut s'écrire :

$$0,00345 = 345 \times 10^{-5} = 34,5 \times 10^{-4} = 3,45 \times 10^{-3} = 0,345 \times 10^{-2} = 345 \times 10^{-5}$$

On représente la situation dans ce tableau de numération exprimé en puissances de 10 **:**

10^6	10^5	10^4	10^3	10^2	10^1	10^0	10^{-1}
	3	2	1	0	0	0	

10^1	10^0	10^{-1}	10^{-2}	10^{-3}	10^{-4}	10^{-5}
	0,	0	0	3	4	5

Définition 3 : Définition pratique : Niveau *

Pour s'accorder, et que chacun utilise la même écriture d'un même nombre, il a été décidé de définir une **notation scientifique**.
On choisit dans le tableau, la colonne du premier chiffre significatif et on l'écrit avec la puissance de 10 correspondante.

Illustration : Niveau *

On écrira alors : $321000 = 3,21 \times 10^5$ et $0,00345 = 3,45 \times 10^{-3}$

10^6	10^5	10^4	10^3	10^2	10^1	10^0	10^{-1}
	3,	2	1	0	0	0	

10^1	10^0	10^{-1}	10^{-2}	10^{-3}	10^{-4}	10^{-5}
	0,	0	0	4	5	

Définition 4 : Définition mathématique Niveau **

Écrire un nombre en notation scientifique c'est l'exprimer sous la forme

$$a \times 10^n \qquad \text{avec } 1 \leq a < 10 \text{ et } n \in \mathbb{N}$$

Exemple 4 : Niveau ***

$123 \times 10^4 = 1,23 \times 10^6$ et $45 \times 10^{-4} = 4,5 \times 10^{-3}$

10^6	10^5	10^4	10^3	10^2	10^1	10^0	10^{-1}	10^{-2}	10^{-3}	10^{-4}	10^{-5}
1	2	3	0	0	0	0					
						0,	0	0	4	5	

Méthode 14 : : Niveau *

Donner la notation scientifique des nombres suivants.

1) 308×10^{-5}

2) $0{,}004\,21 \times 10^{-9}$

3) $0{,}040\,3 \times 10^5$

Correction

S'évaluer :

QCM n°4