Exercice 1

Cécile a invité des amis à déjeuner sur sa terrasse. Elle a prévu en dessert un assortiment de gâteaux individuels qu'elle a achetés surgelés.
Elle sort les gâteaux du congélateur à -19°C et les apporte sur la terrasse où la température est de 25°C. Au bout de 10 minutes la température des gâteaux est de $1,3$°C.

I – Premier modèle

On suppose que la vitesse de décongélation est constante c'est-à-dire que l'augmentation de la température est la même minute après minute.
Selon ce modèle, déterminer quelle serait la température des gâteaux 25 minutes après leur sortie du congélateur. Ce modèle semble-t-il pertinent ?

II – Second modèle

On note T_n la température des gâteaux en degré Celsius, au bout de n minutes après leur sortie du congélateur ; ainsi $T_0 = -19$.
On admet que pour modéliser l'évolution de la température, on doit avoir la relation suivante

$$\text{Pour tout entier naturel } n,\ T_{n+1} - T_n = -0{,}06 \times (T_n - 25).$$

1. Justifier que, pour tout entier n, on a $T_{n+1} = 0{,}94T_n + 1{,}5$
2. Calculer T_1 et T_2. On donnera des valeurs arrondies au dixième.
3. Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n, on a $T_n \leqslant 25$.
   En revenant à la situation étudiée, ce résultat était-il prévisible ?
4. Étudier le sens de variation de la suite (T_n).
5. Démontrer que la suite (T_n) est convergente.
6. On pose pour tout entier naturel n, $U_n = T_n - 25$.
   (a) Montrer que la suite (U_n) est une suite géométrique dont on précisera la raison et le premier terme U_0.
   (b) En déduire que pour tout entier naturel n, $T_n = -44 \times 0{,}94^n + 25$.
   (c) En déduire la limite de la suite (T_n). Interpréter ce résultat dans le contexte de la situation étudiée.
7. (a) Le fabricant conseille de consommer les gâteaux au bout d'une demi-heure à température ambiante après leur sortie du congélateur.
   Quelle est alors la température atteinte par les gâteaux ? On donnera une valeur arrondie à l'entier le plus proche.
   (b) Cécile est une habituée de ces gâteaux, qu'elle aime déguster lorsqu'ils sont encore frais, à la température de 10°C. Donner un encadrement entre deux entiers consécutifs du temps en minutes après lequel Cécile doit déguster son gâteau.
   (c) Le programme suivant, écrit en langage Python, doit renvoyer après son exécution la plus petite valeur de l'entier n pour laquelle $T_n \geqslant 10$.

```python
def seuil() :
  n=0
  T= ....
    while T ....
    T= ....
    n=n+1
return
```

Recopier ce programme sur la copie et compléter les lignes incomplètes afin que le programme renvoie la valeur attendue.

Exercice 2

On considère la suite (u_n) définie par : $u_0 = 1$ et, pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = \dfrac{4u_n}{u_n + 4}$.

n	u_n	$\dfrac{4}{u_n}$
0	1,00	4
1	0,80	5
2	0,67	6
3	0,57	7
4	0,50	8
5	0,44	9
6	0,40	10
7	0,36	11
8	0,33	12
9	0,31	13
10	0,29	14
11	0,27	15
12	0,25	16

1. La copie d'écran ci-contre présente les valeurs, calculées à l'aide d'un tableur, des termes de la suite (u_n) pour n variant de 0 à 12, ainsi que celles du quotient $\dfrac{4}{u_n}$, (avec, pour les valeurs de u_n, affichage de deux chiffres pour les parties décimales).
   À l'aide de ces valeurs, conjecturer l'expression de $\dfrac{4}{u_n}$ en fonction de n.
   Le but de cet exercice est de démontrer cette conjecture (question **5.**), et d'en déduire la limite de la suite (u_n) (question **6.**).
2. Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n, on a : $u_n > 0$.
3. Démontrer que la suite (u_n) est décroissante.
4. Que peut-on conclure des questions **2.** et **3.** concernant la suite (u_n) ?
5. On considère la suite (v_n) définie pour tout entier naturel n par : $v_n = \dfrac{4}{u_n}$.
   Démontrer que (v_n) est une suite arithmétique.
   Préciser sa raison et son premier terme.
   En déduire, pour tout entier naturel n, l'expression de v_n en fonction de n.
6. Déterminer, pour tout entier naturel n, l'expression de u_n en fonction de n.
   En déduire la limite de la suite (u_n).

Exercice 3

On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 10\,000$ et pour tout entier naturel n :

$$u_{n+1} = 0,95u_n + 200.$$

1. Calculer u_1 et vérifier que $u_2 = 9\,415$.
2. (a) Démontrer, à l'aide d'un raisonnement par récurrence, que pour tout entier naturel n :

   $$u_n > 4\,000.$$

   (b) On admet que la suite (u_n) est décroissante. Justifier qu'elle converge.
3. Pour tout entier naturel n, on considère la suite (v_n) définie par : $v_n = u_n - 4\,000$.
   (a) Calculer v_0.

(b) Démontrer que la suite (v_n) est géométrique de raison égale à $0,95$.

(c) En déduire que pour tout entier naturel n :

$$u_n = 4\,000 + 6\,000 \times 0,95^n.$$

(d) Quelle est la limite de la suite (u_n) ? Justifier la réponse.

4. En 2020, une espèce animale comptait 10 000 individus. L'évolution observée les années précédentes conduit à estimer qu'à partir de l'année 2021, cette population baissera de 5 % chaque début d'année.

   Pour ralentir cette baisse, il a été décidé de réintroduire 200 individus à la fin de chaque année, à partir de 2021.

   Une responsable d'une association soutenant cette stratégie affirme que : « l'espèce ne devrait pas s'éteindre, mais malheureusement, nous n'empêcherons pas une disparition de plus de la moitié de la population ».

   Que pensez-vous de cette affirmation ? Justifier la réponse.

Exercice 4

On considère les suites (u_n) et (v_n) définies par : $u_0 = 16$; $v_0 = 5$; et pour tout entier naturel n :

$$\begin{cases} u_{n+1} = \dfrac{3u_n + 2v_n}{5} \\ v_{n+1} = \dfrac{u_n + v_n}{2} \end{cases}$$

1. Calculer u_1 et v_1.
2. On considère la suite (w_n) définie pour tout entier naturel n par : $w_n = u_n - v_n$.

   (a) Démontrer que la suite (w_n) est géométrique de raison 0,1.

   En déduire, pour tout entier naturel n, l'expression de w_n en fonction de n.

   (b) Préciser le signe de la suite (w_n) et la limite de cette suite.

3. (a) Démontrer que, pour tout entier naturel n, on a : $u_{n+1} - u_n = -0,4w_n$.

   (b) En déduire que la suite (u_n) est décroissante.

   On peut démontrer de la même manière que la suite (v_n) est croissante. On admet ce résultat, et on remarque qu'on a alors : pour tout entier naturel n, $v_n \geqslant v_0 = 5$.

   (c) Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n, on a : $u_n \geqslant 5$.

   En déduire que la suite (u_n) est convergente. On appelle ℓ la limite de (u_n).

On peut démontrer de la même manière que la suite (v_n) est convergente. On admet ce résultat, et on appelle ℓ' la limite de (v_n).

4. (a) Démontrer que $\ell = \ell'$.

   (b) On considère la suite (c_n) définie pour tout entier naturel n par : $c_n = 5u_n + 4v_n$.

   Démontrer que la suite (c_n) est constante, c'est-à-dire que pour tout entier naturel n, on a : $c_{n+1} = c_n$.

   En déduire que, pour tout entier naturel n , $c_n = 100$.

   (c) Déterminer la valeur commune des limites ℓ et ℓ'.

Exercice 5

Partie A

On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_0 = 400$ et pour tout entier naturel n :

$$u_{n+1} = 0,9u_n + 60.$$

1. (a) Calculer u_1 et u_2.
   (b) Conjecturer le sens de variation de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$
2. Montrer, par récurrence, que pour tout entier naturel n, on a l'inégalité

$$0 \leqslant u_n \leqslant u_{n+1} \leqslant 600.$$

3. (a) Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente.
   (b) Déterminer la limite de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Justifier.
4. On donne une fonction écrite en langage Python :

```
def mystere(seuil) :
    n=0
    u=400
    while u <= seuil :
        n = n+1
        u = 0.9*u+60
    return n
```

Quelle valeur obtient-on en tapant dans la console de Python : mystere (500) ?

Partie B

Un arboriculteur possède un verger dans lequel il a la place de cultiver au maximum 500 arbres.
Chaque année il vend 10 % des arbres de son verger et puis il replante 60 nouveaux arbres.
Le verger compte 400 arbres en 2023.
L'arboriculteur pense qu'il pourra continuer à vendre et à planter les arbres au même rythme pendant les années à venir.
Va-t-il être confronté à un problème de place dans son verger ? Expliquer votre réponse.

Exercice 1 Exercice 2 Exercice 3 Exercice 4 Exercice 5