Cours & méthodes

Point méthode :
Raisonnement par récurrence

Quand utiliser le raisonnement par récurrence ?

Contexte

Le raisonnement par récurrence s'utilise pour rédiger une démonstration valable pour tout $n \geqslant n_0$.

Exemple

Quand un énoncé est : « Démontrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, ... », vous devez penser au raisonnement par récurrence.
Attention, la réciproque n'est pas vraie, on peut faire des démonstrations pour tout $n \in \mathbb{N}$, sans utiliser la récurrence.
Ex : Soit (u_n) la suite définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par $u_n = n^2 + 1$. $u_n > 0$ se démontre sans récurrence.

Introduction de la méthode sur la copie

Contexte

Pour prouver qu'une proposition est vraie, il faut bien la définir au départ. Il est d'usage de nommer $\mathcal{P}_n$ la propriété à démontrer. Cette notation n'étant pas dans l'énoncé la plupart du temps, c'est à vous de le faire.

Exemple

Enoncé : utilisé dans chaque exemple par la suite
Soit (u_n) la suite définie par $u_0 = -5$ et, pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = \dfrac{1}{2}u_n + 1$..
Montrer par récurrence, que pour tout entier n , $u_n \leqslant u_{n+1} \leqslant 2$
Rédaction :
Soit $\mathcal{P}_n$ la propriété : « $u_n \leqslant u_{n+1} \leqslant 2$ ». Nous allons démontrer par récurrence que $\mathcal{P}_n$ est vraie pour tout entier n

Remarque

Attention $\mathcal{P}_0$ est la propriété pour $n = 0$, ce n'est pas un nombre. On lit souvent $P_0 = 2$ ou $P(0) = 2$ ce qui est absurde.

Plan de la méthode

Contexte

Vous devez clairement établir le plan de votre démonstration, en 3 parties.
1. Initialisation **2. Hérédité** **3.Conclusion**

1. Initialisation

Contexte

La première partie qui vérifie l'initialisation doit être clairement démontrée.
Attention, le calcul est simple mais la rédaction pose souvent problème. Il y a 2 erreurs classiques :

- Il faut poser $n = 0$ ou $n = 1$ ou autre valeur, selon les consignes de l'énoncé. **Il n'y a donc aucune raison d'y**

avoir des n, des u_n dans cette partie. Il ne s'agit que d'un calcul numérique pour une valeur initiale.

- Pour démontrer que la propriété est vraie pour $n = 0$ par exemple, **il faut faire des calculs séparés** qui prouvent en conclusion la condition. Trop souvent, vous partez de l'égalité à démontrer pour aboutir à des égalités du type $2 = 2$...Ce qui révèle une erreur de raisonnement.

Exemple : Avec l'énoncé précédent

1. Initialisation :
On a $u_0 = -2$. Soit $n = 0$. $u_{0+1} = \frac{1}{2}u_0 + 1 = -\frac{5}{2} + 1 = -\frac{3}{2}$. Comme $-2 \leqslant -\frac{3}{2} \leqslant 2$,
On a donc $u_0 \leqslant u_1 \leqslant 2$ donc $\mathcal{P}_0$ est vraie. *(Ne pas oublier de conclure !!)*. La propriété est vraie au rang 0.

2. Hérédité

Contexte

C'est l'étape la plus difficile.
On suppose que $\mathcal{P}_n$ est vraie **pour une valeur** de n, on veut montrer qu'elle est alors vraie pour $n + 1$.
Beaucoup de confusions dans cette étape :

- Beaucoup d'élèves écrivent, on suppose que $\mathcal{P}_n$ est vraie **pour tout entier n**. C'est absurde.
- Beaucoup se trompent de propriété, n'écrivent pas ce qu'ils savent , ni ce qu'ils cherchent. Il faut absolument écrire sur la copie : $\mathcal{P}_n$, l'hypothèse de récurrence, **Ce que je sais** et $\mathcal{P}_{n+1}$ **ce que je cherche**.
- Une fois votre problématique posée, vous commencez à démontrer. Il faut une rupture avec l'étape précédente.

Exemple : Avec l'énoncé précédent

2. Hérédité :
On suppose que $\mathcal{P}_n$ est vraie **pour un entier n**. (Et par pour tout entier !!). On a donc par hypothèse, $u_n \leqslant u_{n+1} \leqslant 2$.
On va chercher à montrer que $\mathcal{P}_{n+1}$ est alors vraie. $\mathcal{P}_{n+1}$ s'écrit $u_{n+1} \leqslant u_{n+2} \leqslant 2$
Démonstration :
Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $\mathcal{P}_n$ est vraie. On a alors :

$$u_n \leqslant u_{n+1} \leqslant 2 \iff \frac{1}{2}u_n \leqslant \frac{1}{2}u_{n+1} \leqslant 1 \iff \frac{1}{2}u_n + 1 \leqslant \frac{1}{2}u_{n+1} + 1 \leqslant 2 \iff u_{n+1} \leqslant u_{n+2} \leqslant 2 \iff \mathcal{P}_{n+1} \text{est vraie} \quad \blacksquare$$

On a montré que la propriété $\mathcal{P}_n$ était héréditaire.

3. Conclusion

Contexte

C'est une étape bilan indispensable, pour conclure votre démonstration, montrer au correcteur votre maîtrise du sujet.

- Il faut donc rappeler que la propriété est vraie pour $n = \ldots$, ou initialisée à partir de $\ldots$.
- Rappeler que la propriété $\mathcal{P}_n$ est héréditaire
- Conclure en citant le raisonnement par récurrence, que la propriété est alors vraie pour tout n vérifiant les conditions.

Exemple : Avec l'énoncé précédent

3. Conclusion :
On a montré que $\mathcal{P}_0$ est vraie et que la propriété $\mathcal{P}_n$ était héréditaire.
On appliquant le raisonnement par récurrence, on montre que $\mathcal{P}_n$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.
On a donc montré que pour tout entier n , $u_n \leqslant u_{n+1} \leqslant 2$