Evaluation de cours : Récurrence et suites

Nom : .... Prénom : .... Classe : T spé

– Calculatrice autorisée – 16 septembre 2024

Exercice 1 (6 points)

Soit (u_n) la suite définie par $u_0 = -5$ et, pour tout entier naturel n,

$$u_{n+1} = \frac{1}{2}u_n + 1.$$

Montrer par récurrence, que pour tout entier n ,

$$u_n \leqslant u_{n+1} \leqslant 2$$

Exercice 2 (6 points)

Démontrer que, pour tout entier $n \geqslant 1$:

$$\sum_{k=1}^{n} k(k+1) = \frac{n(n+1)(n+2)}{3}$$

Exercice 3 (8 points)

Soit (u_n) est la suite définie sur $\mathbb{N}$ par :

$$\begin{cases} u_0 = 2500 \\ u_{n+1} = 0,8u_n + 400 \quad \text{pour tout entier naturel } n \end{cases}$$

1. Calculer u_1 et u_2.
2. Soit la suite (v_n) définie pour tout entier naturel n par $v_n = u_n - 2000$.
   (a) Montrer que la suite (v_n) est une suite géométrique dont on donnera la raison et le premier terme.
   (b) En déduire une expression de v_n en fonction de n.
3. Déterminer une expression de u_n en fonction de n.
4. A l'aide de la calculatrice, déterminer le plus petit entier k, tel que $u_k < 2100$.