Evaluation de cours : Récurrence et suites

Nom : .... Prénom : .... Classe : T spé

– Calculatrice autorisée – 16 septembre 2024

Exercice 1 — 6 points

Soit (u_n) la suite définie par $u_0 = -5$ et, pour tout entier naturel n,

$$u_{n+1} = \frac{1}{2}u_n + 1.$$

Montrer par récurrence, que pour tout entier n ,

$$u_n \leqslant u_{n+1} \leqslant 2$$

Exercice 2 — 6 points

Démontrer que, pour tout entier $n \geqslant 1$:

$$\sum_{k=1}^{n} p(p+1) = \frac{n(n+1)(n+2)}{3}$$

Exercice 3 — 8 points

Soit (u_n) est la suite définie sur $\mathbb{N}$ par :

$$\begin{cases} u_0 = 2500 \\ u_{n+1} = 0,8u_n + 400 \quad \text{pour tout entier naturel } n \end{cases}$$

1. Calculer u_1 et u_2.
2. Soit la suite (v_n) définie pour tout entier naturel n par $v_n = u_n - 2000$.
   (a) Montrer que la suite (v_n) est une suite géométrique dont on donnera la raison et le premier terme.
   (b) En déduire une expression de v_n en fonction de n.
3. Déterminer une expression de u_n en fonction de n.
4. A l'aide de la calculatrice, déterminer le plus petit entier k, tel que $u_k < 2100$.

Corrigé de l'exercice 2
Soit $\mathcal{P}_n$ la propriété :

$$\sum_{k=1}^{n} k(k+1) = \frac{n(n+1)(n+2)}{3}.$$

Démontrons par récurrence que, pour tout entier $n \geqslant 1$, $\mathcal{P}_n$ est vraie.

Étape 1 : Initialisation

Vérifions que la formule est vraie pour $n = 1$, cad $\mathcal{P}_1$ est vraie.
Lorsque $n = 1$, la somme devient :

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{1} k(k+1) &= 1(1+1)\\ &= 1 \times 2\\ &= 2.\end{aligned}$$

D'autre part, la formule donne :

$$\begin{aligned}\frac{1(1+1)(1+2)}{3} &= \frac{1 \times 2 \times 3}{3}\\ &= \frac{6}{3}\\ &= 2.\end{aligned}$$

On a donc vérifié que $\mathcal{P}_1$ est vraie.

Étape 2 : Hérédité

Supposons que la $\mathcal{P}_n$ soit vraie pour un certain $n \geqslant 1$, c'est-à-dire que :

$$\sum_{k=1}^{n} k(k+1) = \frac{n(n+1)(n+2)}{3}. \qquad \textbf{Ce que je sais}$$

Montrons que $\mathcal{P}_{n+1}$ est alors vraie, c'est-à-dire :

$$\sum_{k=1}^{n+1} k(k+1) = \frac{(n+1)(n+2)(n+3)}{3}. \qquad \textbf{Ce que je cherche}$$

En partant de l'hypothèse de récurrence, nous avons :

$$\sum_{k=1}^{n+1} k(k+1) = \sum_{k=1}^{n} k(k+1) + (n+1)((n+1)+1).$$

En utilisant l'hypothèse de récurrence, on obtient :

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n+1} k(k+1) &= \frac{n(n+1)(n+2)}{3} + (n+1)(n+2)\\ &= \frac{n(n+1)(n+2)}{3} + \frac{3(n+1)(n+2)}{3}\end{aligned}$$

Factorisons par $(n+1)(n+2)$:

$$\sum_{k=1}^{n+1} k(k+1) = \frac{(n+1)(n+2)}{3}\,(n+3)\,.$$

Ainsi :

$$\sum_{k=1}^{n+1} k(k+1) = \frac{(n+1)(n+2)(n+3)}{3}.$$

Ce qui correspond bien à l'expression que nous voulions démontrer :

$$\sum_{k=1}^{n+1} k(k+1) = \frac{(n+1)(n+2)(n+3)}{3}.$$

$\mathcal{P}_n$ est bien héréditaire.

Conclusion

On a prouvé que $\mathcal{P}_0$ est vraie (La propriété est initialisée pour $n = 0$).
On a montré que la propriété $\mathcal{P}_n$ était hérédiraire.
Par récurrence, nous avons prouvé que pour tout entier $n \geqslant 1$, on a :

$$\sum_{k=1}^{n} k(k+1) = \frac{n(n+1)(n+2)}{3}.$$

Corrigé de l'exercice 3

1. **Calcul de u_1 et u_2**
   Utilisons la relation de récurrence pour calculer les premiers termes de la suite u_n.

$$\begin{aligned} u_1 &= 0{,}8\,u_0 + 400 \\ &= 0{,}8 \times 2500 + 400 \\ &= 2000 + 400 \\ &= 2400. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} u_2 &= 0{,}8\,u_1 + 400 \\ &= 0{,}8 \times 2400 + 400 \\ &= 1920 + 400 \\ &= 2320. \end{aligned}$$

   Ainsi, $u_1 = 2400$ et $u_2 = 2320$.

2. **Suite (v_n) définie par $v_n = u_n - 2000$**

   (a) **Montrer que (v_n) est une suite géométrique**
   Soit $n \in \mathbb{N}$:

$$\begin{aligned} v_{n+1} &= u_{n+1} - 2000. \\ &= 0{,}8\,u_n + 400 - 2000 \\ &= 0{,}8u_n - 1600 \\ &= 0{,}8(u_n - 2000) \quad \text{On factorise par } 0,8 \\ &= 0,8v_n \quad \text{car } v_n = u_n - 2000 \end{aligned}$$

   La suite (v_n) est donc une suite géométrique de raison $q = 0{,}8$ et de premier terme $v_0 = u_0 - 2000 = 500$.

(b) **Expression de v_n en fonction de n**
La formule générale d'une suite géométrique est, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$v_n = v_0 \times q^n.$$

Ici, $v_0 = 500$ et $q = 0{,}8$, donc :

$$v_n = 500 \times (0{,}8)^n.$$

3. **Expression de u_n en fonction de n**
Puisque, $\forall n \in \mathbb{N}, v_n = u_n - 2000$, nous avons :

$$u_n = v_n + 2000.$$

En substituant l'expression de v_n, on obtient :

$$u_n = 500 \times (0{,}8)^n + 2000.$$

4. **Trouver le plus petit entier k tel que $u_k < 2100$**
A la calculatrice, on a $u_7 > 2100$ et $u_8 < 2100$.
Le premier terme tel que $u_n < 2100$ est u_8 donc $k = 8$.