Exercice 1 : Bac S 2017 actualisé

Un biologiste souhaite étudier l'évolution de la population d'une espèce animale dans une réserve. Cette population est estimée à 12 000 individus en 2023. Les contraintes du milieu naturel font que la population ne peut pas dépasser les 60 000 individus.

Partie A : un premier modèle

Dans une première approche, le biologiste estime que la population croît de 5 % par an.
L'évolution annuelle de la population est ainsi modélisée par une suite (v_n) où v_n représente le nombre d'individus, exprimé en milliers, en $2023 + n$. On a donc
$v_0 = 12$.

1. Déterminer la nature de la suite (v_n) et donner l'expression de v_n en fonction de n.
2. Ce modèle répond-il aux contraintes du milieu naturel ?

Partie B : un second modèle

Le biologiste modélise ensuite l'évolution annuelle de la population par une suite (u_n) définie par $u_0 = 12$ et, pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = -\frac{1,1}{605}u_n^2 + 1,1u_n$.

1. On considère la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par

$$g(x) = -\frac{1,1}{605}x^2 + 1,1x.$$

   (a) Justifier que g est croissante sur [0 ; 60].
   (b) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $g(x) = x$.

2. On remarquera que $u_{n+1} = g(u_n)$.
   (a) Calculer la valeur arrondie à 10^{-3} de u_1. Interpréter.
   (b) Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n, $0 \leqslant u_n \leqslant 55$.
   (c) Démontrer que la suite (u_n) est croissante.
   (d) En déduire la convergence de la suite (u_n).
   (e) On admet que la limite ℓ de la suite (u_n) vérifie $g(\ell) = \ell$. En déduire sa valeur et l'interpréter dans le contexte de l'exercice.

3. Le biologiste souhaite déterminer le nombre d'années au bout duquel la population dépassera les 50 000 individus avec ce second modèle.
   Il utilise l'algorithme suivant.

```
def u(n):
  n = 0
  u = 12
  while u............:
    u = ......................
    n ...........
return .....
```

   Recopier et compléter cette fonction en langage Python afin qu'elle affiche en sortie le plus petit entier r tel que $u_r \geqslant 50$.

Exercice 2 : Asie - Juin 2021

En 2020, une influenceuse sur les réseaux sociaux compte 1 000 abonnés à son profil. On modélise le nombre d'abonnés ainsi : chaque année, elle perd 10 % de ses abonnés auxquels s'ajoutent 250 nouveaux abonnés.

Pour tout entier naturel n, on note u_n le nombre d'abonnés à son profil en l'année $(2020+n)$, suivant cette modélisation. Ainsi $u_0 = 1\,000$.

1. Calculer u_1.
2. Justifier que pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = 0,9u_n + 250$.
3. La fonction Python nommée « suite » est définie ci-dessous. Dans le contexte de l'exercice, interpréter la valeur renvoyée par suite(10).

```
def suite( n) :
  u = 1000
  for i in range(n) :
    u = 0,9*u + 250
return u
```

4. (a) Montrer, à l'aide d'un raisonnement par récurrence, que pour tout entier naturel n, $u_n \leqslant 2\,500$.
   (b) Démontrer que la suite (u_n) est croissante.
   (c) Déduire des questions précédentes que la suite (u_n) est convergente.
5. Soit (v_n) la suite définie par $v_n = u_n - 2\,500$ pour tout entier naturel n.
   (a) Montrer que la suite (v_n) est une suite géométrique de raison $0,9$ et de terme initial $v_0 = -1\,500$.
   (b) Pour tout entier naturel n, exprimer v_n en fonction de n et montrer que :

   $$u_n = -1\,500 \times 0,9^n + 2\,500.$$

   (c) Déterminer la limite de la suite (u_n) et interpréter dans le contexte de l'exercice.
6. Complétez la fonction abonnes, qui permet de déterminer en quelle année le nombre d'abonnés dépassera 2 200.

```
def abonnes :
  n = ....
  u = ....
    while u <  ........ :
    u = ..........
    n=..........
return .....
```

   Déterminer cette année.

Corrigé de l'exercice 1
Un biologiste souhaite étudier l'évolution de la population d'une espèce animale dans une réserve.

Partie A : un premier modèle

Dans une première approche, le biologiste estime que la population croît de 5 % par an.

1. Augmenter de 5 %, c'est multiplier par $1 + \dfrac{5}{100} = 1,05$; la suite (v_n) est donc géométrique de premier terme $v_0 = 12$ et de raison $q = 1,05$.
   Donc, pour tout n, on a : $v_n = v_0 \times q^n = 12 \times 1,05^n$.
2. On étudie la limite de la suite (v_n) :
   comme $q = 1,05 > 1$ et $v_0 > 0$, on sait que $\lim\limits_{n\to+\infty} v_0 \times q^n = +\infty$
   Donc $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = +\infty$
   Par conséquent, la suite n'est pas bornée par 60.
   Ce modèle ne répond donc pas aux contraintes du milieu naturel.

Partie B : un second modèle

Le biologiste modélise ensuite l'évolution annuelle de la population par une suite (u_n) définie par $u_0 = 12$ et, pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = -\dfrac{1,1}{605}u_n^2 + 1,1u_n$.

1. On considère la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = -\dfrac{1,1}{605}x^2 + 1,1x$.
   (a) La fonction g est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $g'(x) = -\dfrac{1,1}{605} \times 2x + 1,1 = -\dfrac{2,2}{605}x + 1,1$.
   $g'(x) > 0 \iff -\dfrac{2,2}{605}x + 1,1 > 0 \iff 1,1 > \dfrac{2,2}{605}x \iff \dfrac{1,1 \times 605}{2,2} > x \iff x < 302,5$
   Donc $g'(x) > 0$ sur $[0\ ;\ 60]$ donc g est croissante sur $[0\ ;\ 60]$.
   (b) On résout dans $\mathbb{R}$ l'équation $g(x) = x$:
   $g(x) = x \iff -\dfrac{1,1}{605}x^2 + 1,1x = x \iff -\dfrac{1,1}{605}x^2 + 0,1x = 0 \iff x\left(-\dfrac{1,1}{605}x + 0,1\right) = 0$
   $\iff x = 0$ ou $-\dfrac{1,1}{605}x + 0,1 = 0 \iff x = 0$ ou $0,1 = \dfrac{1,1}{605}x \iff x = 0$ ou $0,1 \times \dfrac{605}{1,1} = x$
   $\iff x = 0$ ou $x = 55$
2. On remarquera que $u_{n+1} = g(u_n)$.
   (a) $u_1 = g(u_0) = g(12) \approx 12,938$
   Avec ce modèle, on peut estimer la population à 12 938 individus en 2017.
   (b) Soit $\mathcal{P}_n$ la propriété $0 \leqslant u_n \leqslant 55$.
   - **Initialisation**
     Pour $n = 0$, $u_0 = 12$ et $0 \leqslant 12 \leqslant 55$ donc la propriété est vraie au rang 0.
   - **Hérédité**
     On suppose que le propriété est vraie au rang $n \geqslant 0$, c'est-à -dire que $0 \leqslant u_n \leqslant 55$; c'est l'hypothèse de récurrence.
     Or $0 \in [0\ ;\ 60]$ et $55 \in [0\ ;\ 60]$; de plus on sait que le fonction g est croissante sur $[0\ ;\ 60]$ donc de $0 \leqslant u_n \leqslant 55$, on peut déduire que $g(0) \leqslant g(u_n) \leqslant g(55)$.

Les nombres 0 et 55 sont solutions de l'équation $g(x) = x$ donc $g(0) = 0$ et $g(55) = 55$; de plus, $g(u_n) = u_{n+1}$.

Donc $g(0) \leqslant g(u_n) \leqslant g(55)$ équivaut à $0 \leqslant u_{n+1} \leqslant 55$ et on a donc démontré que la propriété était vraie au rang $n+1$.

- **Conclusion**

  La propriété est vraie au rang 0 et elle est héréditaire pour tout $n \geqslant 0$; d'après le principe de récurrence, elle est vraie pour tout $n \geqslant 0$.

On a donc démontré par récurrence que, pour tout entier naturel n, $0 \leqslant u_n \leqslant 55$.

(c) Pour tout n, $u_{n+1} - u_n = -\dfrac{1,1}{605}u_n^2 + 1,1u_n - u_n = -\dfrac{1,1}{605}u_n^2 + 0,1u_n = u_n\left(-\dfrac{1,1}{605}u_n + 0,1\right)$

$$= u_n \times \frac{1,1}{605}\left(-u_n + 0,1 \times \frac{605}{1,1}\right) = \frac{1,1}{605}u_n\left(55 - u_n\right)$$

On sait que $0 \leqslant u_n \leqslant 55$ donc $55 - u_n \geqslant 0$ donc $\dfrac{1,1}{605}u_n\left(55 - u_n\right) \geqslant 0$.

On a donc démontré que $u_{n+1} - u_n \geqslant 0$ pour tout n donc la suite (u_n) est croissante.

(d) La suite (u_n) est croissante et majorée par 55 donc, d'après le théorème de la convergence monotone, la suite (u_n) est convergente.

(e) On admet que la limite ℓ de la suite (u_n) vérifie $g(\ell) = \ell$ donc elle est solution de l'équation $g(x) = x$.

L'équation $g(x) = x$ n'admet que 2 solutions : 0 et 55.

La suite (u_n) est croissante et $u_0 = 12$ donc la limite ℓ de la suite est supérieure ou égale à 12.

On en déduit donc que $\ell = 55$ ce qui signifie que, selon ce modèle, la population va tendre vers $55\,000$ individus.

3. Le biologiste souhaite déterminer le nombre d'années au bout duquel la population dépassera les 50 000 individus avec ce second modèle.

   On complète l'algorithme afin qu'il affiche en sortie le plus petit entier r tel que $u_r \geqslant 50$:

```
def u(n):
n = 0
u = 12
while u<50:
u = 1,1*u - 1,1/605  * u**2
n=n+1
return n
```

Corrigé de l'exercice 2
Commun à tous les candidats

En 2020, une influenceuse sur les réseaux sociaux compte 1 000 abonnés à son profil. On modélise le nombre d'abonnés ainsi : chaque année, elle perd 10 % de ses abonnés auxquels s'ajoutent 250 nouveaux abonnés.

Pour tout entier naturel n, on note u_n le nombre d'abonnés à son profil en l'année $(2020+n)$, suivant cette modélisation. Ainsi $u_0 = 1\,000$.

1. On a donc $u_1 = 1\,000 \times \left(1 - \dfrac{10}{100}\right) + 250 = 1\,000 \times 0,9 + 250 = 900 + 250 = 1\,150$.

2. Enlever 10 % c'est multiplier par $1 - \dfrac{10}{100} = 1 - 0,10 = 0,90$.

   Le nombre d'abonnés de l'année précédente est donc multiplié par $0,9$; on ajoute ensuite chaque année 250 nouveaux abonnés, donc pour tout naturel n :

$$u_{n+1} = 0,9u_n + 250.$$

3. $u(10)$ donne le nombre d'abonnés au bout de 10 ans ; une calculatrice donne $\approx 1\,977$.

4. (a) *Initialisation* : on a $u_0 = 1\,000 \leqslant 2\,500$: la relation est vraie au rang 0 ;

   Hérédité : on suppose que pour $n \in \mathbb{N}$, on ait $u_n \leqslant 2\,500$.

   La multiplication par $0,9 > 0$ respectant l'ordre, on a donc $0,9u_n \leqslant 0,9 \times 2\,500$ ou $0,9u_n \leqslant 2\,250$, puis en ajoutant 250 à chaque membre :

   $0,9u_n + 250 \leqslant 2\,250 + 250$, soit $u_{n+1} \leqslant 2\,500$: la relation est encore vraie au rang $n+1$.

   La relation est vraie au rang 0 et si elle est vraie au rang $n \in \mathbb{N}$, elle est vraie au rang $n+1$: d'après le principe de récurrence : quel que soit $n \in \mathbb{N}$, $u_n \leqslant 2\,500$.

   (b) Soit $n \in \mathbb{N}$, on a $u_{n+1} - u_n = 0,9u_n + 250 - u_n = -0,1u_n + 250$.

   Or d'après la question précédente : $u_n \leqslant 2\,500$, puis $0,1u_n \leqslant 0,1 \times 2\,500$ ou encore $0,1u_n \leqslant 250$, soit en prenant les opposés : $-250 \leqslant -0,1u_n$ et en ajoutant à chaque membre 250 : $0 \leqslant -0,1u_n + 250$.

   On a donc pour $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} - u_n \geqslant 0$ ou $u_{n+1} \geqslant u_n$: la suite (u_n) est croissante.

   (c) La suite (u_n) est croissante (d'après 4. b.) et majorée par 2 500 (d'après 4. a.) : elle converge donc vers une limite inférieure ou égale à 2 500.

5. (a) Pour $n \in \mathbb{N}$, $v_{n+1} = u_{n+1} - 2\,500 = 0,9u_n + 250 - 2\,500$, soit

   $v_{n+1} = 0,9u_n - 2\,250 = 0,9\,(u_n - 2\,500) = 0,9v_n$.

   L'égalité vraie quel que soit $n \in \mathbb{N}$, $v_{n+1} = 0,9v_n$ montre que la suite (v_n) est une suite géométrique de raison $0,9$ et de terme initial $v_0 = u_0 - 2\,500 = 1\,000 - 2\,500 = -1\,500$.

   (b) On sait que quel que soit $n \in \mathbb{N}$, $v_n = v_0 \times 0,9^n = -1\,500 \times 0,9^n$.

   Or $v_n = u_n - 2\,500 \iff u_n = v_n + 2\,500 = 2\,500 - 1\,500 \times 0,9^n$.

   (c) Comme $0 < 0,9 < 1$, on sait que $\lim\limits_{n\to+\infty} 0,9^n = 0$ et par suite par produit de limites $\lim\limits_{n\to+\infty} -1\,500 \times 0,9^n = 0$ et finalement $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 2\,500$.

6. Écrire un programme qui permet de déterminer en quelle année le nombre d'abonnés dépassera 2 200.

   Déterminer cette année.

```
n = 0
u = 1 000
   while u < 2 200 :
      u = 0,9*u + 250
      n = n+1
   return n
```

   Le programme s'arrêtera la 16e année.