Cours & méthodes

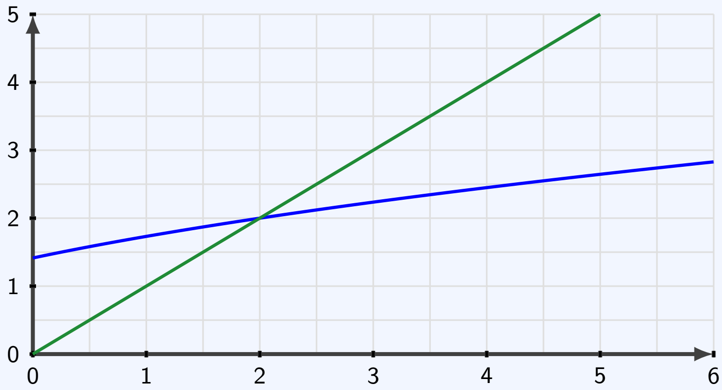
# Limites de suites

2 ANALYSE

## 1 Approches de la notion de limite d'une suite :

**Activité** 1 : Représentation graphique d'une suite définie par une fonction

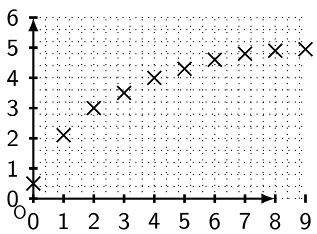
On a représenté ci-dessous, la fonction $f$ définie sur $[0;9]$ par $f(x) = \sqrt{x+2}$ et la droite d'équation $y = x$.
En déduire la représentation graphique des premiers termes de la suite $u$ définie pour tout entier naturel $n$, $u_{n+1} = \sqrt{u_n + 2}$ dans ces deux cas distincts :
1) $u_0 = 1$ 2) $u_0 = 5$
Que peut-on en déduire sur le comportement de la suite pour de grandes valeurs de $n$ ?

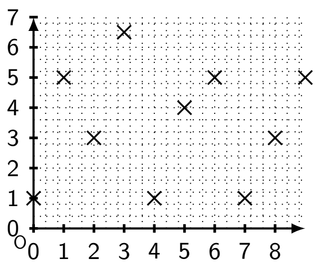


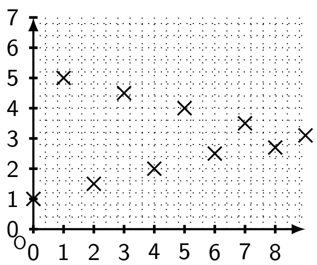

Correction

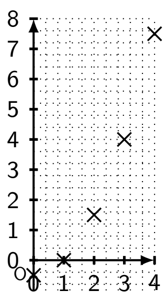
**Activité** 2 : Conjecturer graphiquement des limites de suites

A partir des représentations graphiques, conjecturer si la suite représentée peut ou non avoir une limite finie. Si oui, en donner la valeur.



**Plan de Travail**

**En classe :** exo 17 p 144 ☐ exo 18 p 144 ☐ exo 19 p 144 ☐ exo 20 p 144 ☐ Activité 1 ☐

**En Vidéo** : Le cours

# 2 Limite d'une suite

## 2.1 Limite infinie

**Activité** 3 : Animation Géogébra

En faisant évoluer le paramètre $A$ observer le paramètre $p$ et la zone dédiée.
Essayer de déduire la définition d'une limite infinie d'une suite.

**Activité** 4 : Conjecturer une limite finie.

Conjecturer la limite de la suite $(u_n)$ définie sur $\mathbb{N}$ par $u_n = 2n + 1$.
Est-il possible de trouver un rang $n$, tel que $u_n > 1000000$ ?

Correction

**Définition** 1 : Limite infinie

Soit $(u_n)$ une suite réelle.

- On dit que $u_n$ tend vers $+\infty$ lorsque $n$ tend vers $+\infty$ si, pour tout réel $A$, l'intervalle $[A; +\infty[$ contient tous les termes de la suite $(u_n)$ à partir d'un certain rang.
  Autrement dit, il existe un entier naturel $N$ tel que, pour tout entier $n \geqslant N$, on a $u_n \geqslant A$.
  On note alors $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = +\infty$
- On dit que $u_n$ tend vers $-\infty$ lorsque $n$ tend vers $+\infty$ si, pour tout réel $A$, l'intervalle $]-\infty; A[$ contient tous les termes de la suite $(u_n)$ à partir d'un certain rang.
  Autrement dit, il existe un entier naturel $N$ tel que, pour tout entier $n \geqslant N$, on a $u_n \leqslant A$.
  On note alors $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = -\infty$

**Remarque** : Pour les matheux !!

La même définition de la limite en $+\infty$ en langage mathématique donnerait : $\forall A \in \mathbb{R}, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N}, n > N, u_n \geqslant A$

**Attention**

- Une suite qui tend vers $+\infty$ n'est pas forcément croissante.
- Il est également faux de dire qu'une suite qui est strictement croissante tend forcément vers $+\infty$.

**Méthode** 1 : Premier calcul de limite

Fixons un réel $A$. Démontrer que l'intervalle $]A;+\infty[$ contient, à partir d'un certain rang, tous les termes de la suite $(u_n)$, définie pour tout $n$, par $u_n = n^2$.
Que peut-on en conclure ?

Correction

# Plan de Travail

**En classe :** exo 22 p 144 ☐ exo 23 p 144 ☐ **Autonomie :** Exo 1 ☐ Exo 2 ☐ Exo 3 ☐

## 2.2 Limite finie : suite convergente

**Activité** 5 : Approche de la démonstration d'une limite finie.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $u_n = \dfrac{3-5n}{10n+2}$. Quelle semble être la limite de la suite $(u_n)$ ?

**Activité** 6 : Animation Géogébra

En faisant évoluer le paramètre $\varepsilon$ observer le paramètre $p$ et la zone dédiée.
Essayer de déduire la définition d'une limite infinie d'une suite.

**Définition** 2 : Limite finie

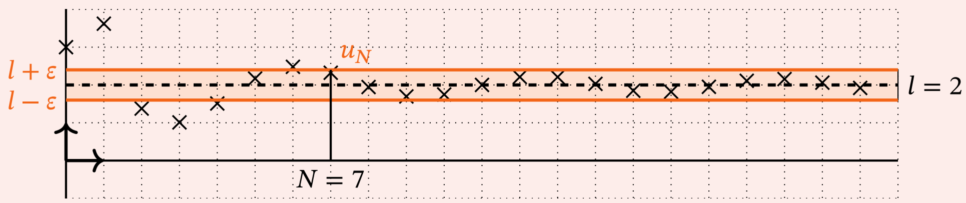
Soit $(u_n)$ une suite réelle et $l$ un réel.
On dit que $u_n$ tend vers $l$ lorsque $n$ tend vers $+\infty$ si, pour tout $\varepsilon > 0$, l'intervalle $]l-\varepsilon, l+\varepsilon[$ contient tous les termes de la suite $(u_n)$ à partir d'un certain rang.
Autrement dit, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un entier $N$ tel que, dès que $n \geqslant N$, on a $l-\varepsilon < u_n < l+\varepsilon$.
On note alors $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = l$.

**Remarque** : Pour les matheux !!

Une définition mathématique de la convergence d'une suite $(u_n)$ vers un réel $l$ est : $\forall\varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n > N, |u_n - l| < \varepsilon$

**Illustration**

On a représenté graphiquement une certaine suite $(u_n)$ ci-dessous.




La suite $(u_n)$ semble tendre vers 2.
Par exemple, pour $\varepsilon = 0{,}4$, tous les termes de la suite sont dans l'intervalle $]2-\varepsilon; 2+\varepsilon[$, soit $]1{,}6\,;\,2{,}4[$ à partir du rang 7. Ce raisonnement vaut pour n'importe quel $\varepsilon$, aussi petit soit-il.

**Méthode** 2 : Déterminer une limite finie. Pour les matheux !!

Soit la suite $(u_n)$ définie sur $\mathbb{N}$ par $u_n = 1 - \frac{1}{n}$.
Appliquer la définition pour prouver sa limite :

Correction

## Plan de Travail

**En classe :** exo 21 p 144 ☐ exo 43 p 144 ☐ exo 44 p 144 ☐

**Définition** 3 : Suite convergente

On dit qu'une suite qui admet une limite finie $l \in \mathbb{R}$ converge vers $l$.
On dit aussi qu'une telle suite est **convergente**

Vidéo de cours

**Exemple**

On peut dire que la suite définie pour $n \in \mathbb{N}$ par $u_n = 1 - \frac{1}{n}$ converge vers 1. On note : $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = 1$.

**Définition** 4 : Suite divergente

Une suite qui n'est pas convergente est dite divergente.

**Exemple**

On a vu précédemment que la suite $(u_n)$ définie sur $\mathbb{N}$ par $u_n = 2n + 1$ a pour limite $+\infty$.
$(u_n)$ est donc une suite **divergente**. Sa limite n'est pas finie. On peut dire que $(u_n)$ diverge vers $+\infty$.

**Remarque** : Attention !

Une suite qui est divergente n'admet pas nécessairement de limite infinie.
Par exemple, la suite de terme générale $(-1)^n$ prend alternativement les valeurs -1 et 1. C'est une suite alternée, qui n'admet donc pas de limite. Elle est donc divergente.

**S'évaluer**

**QCM n°1**

**Méthode** 3 : Déterminer par le calcul une limite finie. Pour les matheux !

Pour tout entier naturel $n$, on pose $u_n = \frac{2n+1}{4n+5}$.
Déterminer la limite de $(u_n)$.

Correction

**Propriété** 1

Si une suite est convergente, elle est bornée.

**Propriété** 2 : Contraposée de la propriété 1

Si une suite n'est pas bornée, elle ne peut pas être convergente. Elle est donc divergente.

**Remarque**

La réciproque de la propriété 2 est fausse :
Toute suite bornée n'est pas nécessairement convergente. $u_n = \sin(n)$ par exemple.

**QCM n°2**

## Plan de Travail

**En classe :** exo 22 p 144 ☐ exo 23 p 144 ☐

### 2.3 Limites de suites usuelles

**En Vidéo** : Le cours

**Propriété** 3 : Les limites à connaître

$$\lim_{n\to+\infty} n = +\infty \qquad \lim_{n\to+\infty} n^2 = +\infty \qquad \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n} = 0$$

Plus généralement, pour tout entier naturel non nul $\alpha$,
$\lim\limits_{n\to+\infty} n^\alpha = +\infty$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{n^\alpha} = 0$.

$$\lim_{n\to+\infty} \sqrt{n} = +\infty \qquad \lim_{n\to+\infty} e^n = +\infty \qquad \lim_{n\to+\infty} e^{-n} = 0$$

Les suites $(\cos(n))$, $(\sin(n))$ et $((-1)^n)$ n'admettent de limite lorsque $n$ tend vers $+\infty$.

**QCM n°3**

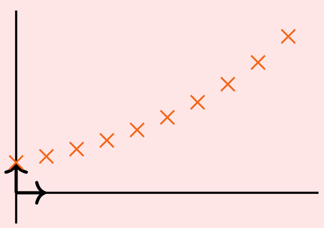
# 3 Suites géométriques et suites monotones

### 3.1 Suites du type $(q^n)$

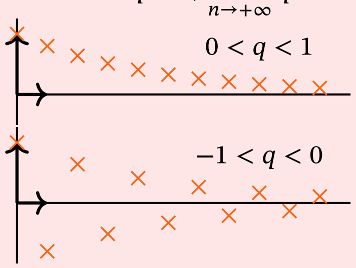
**Propriété** 4 : Limite de $(q^n)$

Soit $q$ un réel. On s'intéresse au comportement de la suite $(q^n)$ selon la valeur de $q$.

- Si $q > 1$, $\lim\limits_{n\to+\infty} q^n = +\infty$



- Si $-1 < q < 1$, $\lim\limits_{n\to+\infty} q^n = 0$




- Si $q = 1$, $\lim\limits_{n\to+\infty} q^n = 1$
- Si $q \leqslant -1$, la suite $(q^n)$ n'admet pas de limite.

**Propriété** 5 : Autre formulation

Soit $q$ un réel.

- Si $q \leqslant -1$ alors la suite $(q^n)$ diverge et n'admet pas de limite.
- Si $-1 < q < 1$ alors la suite $(q^n)$ converge vers 0.
- Si $q = 1$ alors la suite $(q^n)$ converge vers 1.
- Si $q > 1$ alors la suite $(q^n)$ diverge vers $+\infty$.

Démonstration en pdf

Démonstration en vidéo

**Méthode** 4 : Déterminer la limite d'une suite du type $(q^n)$

Déterminer la limite des suites ci-dessous, définies pour tout $n \in \mathbb{N}$.
$u_n = \left(\frac{1}{3}\right)^n \quad v_n = \left(\frac{5}{4}\right)^n$

Correction

**Méthode** 5 : Étudier la convergence d'une suite géométrique

Étudier la convergence de chacune des suites suivantes définies sur $\mathbb{N}$.

- $(u_n)$, suite géométrique de raison $-\frac{5}{2}$ et de premier terme égal à 4.
- $(v_n)$, suite géométrique de raison $e$ et de premier terme égal à $-3$.

Correction

**Plan de Travail**

Exo 4 ☐ Exo 5 ☐ Exo 6 ☐ Exo 16 p 141 ☐

**QCM n°4**

### 3.2 Suites monotones

**Théorème** 1 : (admis)

Soit $(u_n)$ une suite de nombres réels.

- Si $(u_n)$ est croissante et majorée, alors $(u_n)$ converge.
- Si $(u_n)$ est décroissante et minorée, alors $(u_n)$ converge.

**Théorème** 2 : Corollaire

- Si $(u_n)$ est croissante et majorée par $M$, alors $(u_n)$ converge vers une limite $\ell$ telle que $\ell \leq M$.
- Si $(u_n)$ est décroissante et minorée par $m$, alors $(u_n)$ converge vers une limite $\ell$ telle que $\ell \geq m$.

**Remarque** : Attention !!

Soit la suite $(u_n)$ définie pour $n \in \mathbb{N}$ par $u_n = 2 - \left(\frac{1}{4}\right)^n$.
On démontra facilement que $(u_n)$ est croissante et on a pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \leqslant 5$.
On ne peut pas conclure que $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = 5$
On peut simplement déduire que si $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = l$ alors $l \leqslant 5$

**Théorème** 3

- Si $(u_n)$ est croissante et non majorée, alors $(u_n)$ diverge vers $+\infty$.
- Si $(u_n)$ est décroissante et non minorée, alors $(u_n)$ diverge vers $-\infty$.

Démonstration en vidéo

**Méthode** 6 : Déterminer qu'une suite est convergente.

Soit la suite $(u_n)$ définie par $u_0 = 4$, et pour tout entier naturel $n$, $u_{n+1} = \frac{1}{2}u_n + 1$.

1) Montrer par récurrence que la suite $(u_n)$ est minorée par 2.
2) En déduire que la suite $(u_n)$ est décroissante.
3) Que peut-on en déduire de la convergence de la suite $(u_n)$ ?

Correction

**Remarque**

On considère la suite $(u_n)$ de l'exercice précédent.
On peut a montré que cette suite est donc convergente. On note $l = \lim\limits_{n\to+\infty} u_n$.
On a : $u_{n+1} = \frac{1}{2}u_n + 1$. Puisque la suite $(u_n)$ est convergente, on peut passer à la limite dans cette égalité.
Ainsi, $\lim\limits_{n\to+\infty} u_{n+1} = \lim\limits_{n\to+\infty} \left(\frac{1}{2}u_n + 1\right)$
Or, $\lim\limits_{n\to+\infty} u_{n+1} = l$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(\frac{1}{2}u_n + 1\right) = \frac{1}{2}l + 1$.
Ainsi, $l$ est solution de l'équation $x = \frac{1}{2}x + 1$. On a donc $l = 2$.

## Plan de Travail

**En classe :** Exo 7 ☐ Exo 8 ☐ Exo 47 p 147 ☐

**QCM n°5**

# 4 Opérations sur les limites

## 4.1 Limite de la somme

**Activité** 7 : Forme indéterminée d'une somme de limites :

Soit $(u_n)$ et $(v_n)$ les suites définies pour tout $n \in \mathbb{N}$ par $u_n = n^2 - n$ et $v_n = n - n^2$
Conjecturer, à la calculatrice si besoin, la limite de chacune de ces limites ?

**Propriété** 6 : Tableau récapitulatif

On considère deux suites réelles $(u_n)$ et $(v_n)$ et deux réels $l_1$ et $l_2$.

| | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$ | $l_1$ | $l_1$ | $l_1$ | $+\infty$ | $-\infty$ | $+\infty$ |
| $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n$ | $l_2$ | $+\infty$ | $-\infty$ | $+\infty$ | $-\infty$ | $-\infty$ |
| $\lim\limits_{n\to+\infty} (u_n + v_n)$ | $l_1 + l_2$ | $+\infty$ | $-\infty$ | $+\infty$ | $-\infty$ | **Indéterminé** |

**Méthode** 7 : Premier calcul simple de limite :

Déterminer la limite de la suite $(u_n)$ définie pour $n \in \mathbb{N}$ par $u_n = n^2 - 1000$.

Correction

**Méthode** 8 : Calculer la limite d'une somme

Pour tout entier naturel $n$, on pose $u_n = n^2 + e^{-n} - 4$. Calculer $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n$

Correction

## Plan de Travail

**en classe :** Exo 9 ☐ Exo 25 p 145 ☐

**QCM n°6**

### 4.2 Limite du produit

**Activité** 8 : Forme indéterminée d'un produit de limites :

Pour tout entier naturel non nul $n$, on pose $u_n = \dfrac{2}{n}$, $v_n = n$ et $w_n = n^2$.
Calculer $\lim\limits_{n \to +\infty} (u_n\, v_n)$ et $\lim\limits_{n \to +\infty} (u_n\, w_n)$

Correction

**Propriété** 7 : Tableau récapitulatif du produit de limites

On considère deux suites réelles $(u_n)$ et $(v_n)$ et deux réels $l_1$ et $l_2$.

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n$ | $l_1$ | $l_1 \neq 0$ | $\infty$ | $0$ |
| $\lim\limits_{n \to +\infty} v_n$ | $l_2$ | $\infty$ | $\infty$ | $\infty$ |
| $\lim\limits_{n \to +\infty} (u_n\, v_n)$ | $l_1\, l_2$ | $\infty$ (r.s.) | $\infty$ (r.s.) | **Indéterminé** |

**r.s. : Règle des signes**

**Méthode** 9 : Déterminer la limite d'un produit de suites.

Pour tout entier naturel non nul $n$, on pose $u_n = \left(\dfrac{3}{n} - 4\right) \times (n^2 + 2\sqrt{n})$.
Déterminer la limite de $(u_n)$.

Correction

## Plan de Travail

**en classe :** Exo 10 ☐ Exo 27 p 145 ☐ **en autonomie :** Exo 11 ☐

**QCM n°7**

### 4.3 Limite du quotient

**Propriété** 8 : Tableau récapitulatif des limites du quotient de deux suites

On considère deux suites réelles $(u_n)$ et $(v_n)$ telles que $(v_n)$ ne s'annule pas à partir d'un certain rang. On considère deux réels $l_1$ et $l_2$, avec $l_2 \neq 0$.

| | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$ | $l_1$ | $l_1$ | $l_1 \neq 0$ | $\infty$ | $0$ | $\infty$ |
| $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n$ | $l_2 \neq 0$ | $\infty$ | $0^+$ ou $0^-$ | $l_2$, $0^+$ ou $0^-$ | $0$ | $\infty$ |
| $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(\dfrac{u_n}{v_n}\right)$ | $\dfrac{l_1}{l_2}$ | $0$ | $\infty$ (r.s.) | $\infty$ (r.s.) | **Indéterminé** | |

**r.s. : Règle des signes**

**Méthode** 10 : Déterminer la limite d'un quotient de deux suites

Pour tout entier naturel non nul $n$ on pose $u_n = \dfrac{1+\dfrac{2}{n}}{3+n}$. Déterminer la limite de $(u_n)$.

Correction

**Méthode** 11 : Déterminer la limite d'un quotient de deux suites

Pour tout entier naturel non nul $n$ on pose $u_n = \dfrac{1-n}{e^{-n}+\dfrac{1}{n}}$ Déterminer la limite de $(u_n)$.

Correction

## Plan de Travail

**en classe :** Exo 30 p 145 ☐

**QCM n°8**

**En Vidéo** : Opérations avec les limites

# 5 Formes indéterminées

### 5.1 Factorisation par le terme dominant

**Méthode** 12 : Lever une indétermination avec des puissances de $n$

On utilise souvent une astuce, qui consiste à factoriser par le terme de plus haut degré. Dans beaucoup de situations, cette stratégie permet au final de "lever" l'indétermination, et de conclure.

Pour tout entier naturel $n$, on pose $w_n = 4n^2+2n+3$ et $v_n = 3n^2+7n-1$. Déterminer la limite de $\left(\dfrac{u_n}{v_n}\right)$.

Correction

**Méthode** 13 : Lever une indétermination : $+\infty \times 0$

Déterminer la limite de la suite $(u_n)$ définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ tel que $n > 2$ par $u_n = (n^2 - 1)\left(\frac{2}{n-2}\right)$.

Correction pdf

Correction vidéo

# Plan de Travail

**en classe :** Exo 12 ☐ Exo 31 p 145 ☐

QCM n°9

**En Vidéo** : Opérations avec les limites

## 5.2 Quantité conjuguée

**Méthode** 14 : Lever une indétermination avec des racines carrées.

Lorsque l'on est en présence d'une différence de racines carrées $\sqrt{a} - \sqrt{b}$, on peut multiplier et diviser par la quantité conjuguée $\sqrt{a} + \sqrt{b}$.
L'objectif est ici d'utiliser l'identité remarquable $(x - y)(x + y) = x^2 - y^2$. En particulier, dans le cas des racines carrées, cela entraîne que, pour tous réels strictement positifs $a$ et $b$,

$$(\sqrt{a} - \sqrt{b})(\sqrt{a} + \sqrt{b}) = \sqrt{a}^2 - \sqrt{b}^2 = a - b$$

Pour tout entier naturel non nul $n$, on note $u_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n-1}$.
Déterminer la limite de $(u_n)$.

Correction

# Plan de Travail

Exo 13 ☐ Exo 14 ☐

QCM n°10

# 6 Limites et comparaisons :

## 6.1 Théorèmes de comparaison (admis)

**Théorème** 4 : Théorème de comparaison

Soit $(u_n)$ et $(v_n)$ deux suites définies sur $\mathbb{N}$.
Si, à partir d'un certain rang $N$, on a $u_n < v_n$, et $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = +\infty$ ,
alors $\lim\limits_{n \to +\infty} v_n = +\infty$

Démonstration en vidéo

**Théorème** 5 : Théorème de comparaison

Si, à partir d'un certain rang $N$, on a $v_n < u_n$, et $\lim u_n = -\infty$ ,

alors $\lim\limits_{n \to +\infty} v_n = -\infty$

**QCM n°11**

**Méthode** 15 : Lever une indétermination avec un théorème de comparaison.

Soit $(u_n)$ la suite définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par $u_n = 3n^2 + \sqrt{2n^3 + 3n^2 + 4n + 5}$.

Correction

## 6.2 Théorèmes d'encadrement ou des gendarmes. (admis)

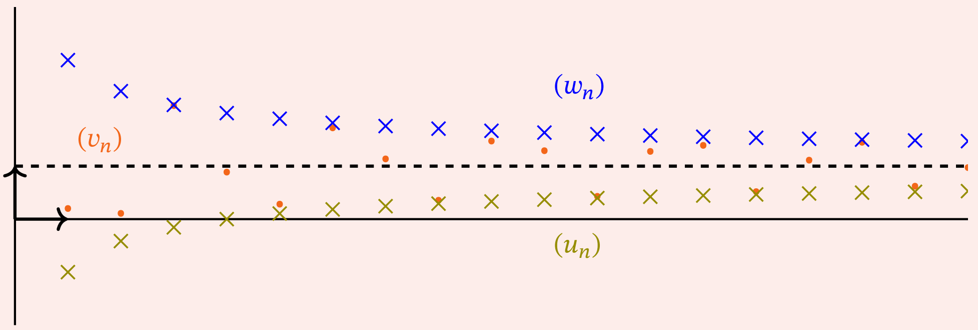
**Théorème** 6 : Théorème des gendarmes

Soit $(u_n)$, $(v_n)$ et $(w_n)$, trois suites définies sur $\mathbb{N}$.
Si, à partir d'un certain rang $N$, on a $v_n < u_n < w_n$, et $\lim\limits_{n \to +\infty} v_n = \lim\limits_{n \to +\infty} w_n = L \in \mathbb{R}$ ,
alors $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = L$

**QCM n°12**

**Illustration**

Sur l'exemple suivant, trois suites $(u_n)$, $(v_n)$ et $(w_n)$ sont représentées. Pour tout entier naturel $n$, $u_n \leqslant v_n \leqslant w_n$. Si l'on sait que $(u_n)$ et $(w_n)$ sont convergentes de même limite, on en déduit la convergence et limite de la suite $(v_n)$.




**Méthode** 16 : Lever une indétermination avec le théorème des gendarmes.

Déterminer la limite de la suite $(u_n)$ définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par $u_n = \dfrac{5 + \cos(n)}{n}$.

Correction pdf

Correction en vidéo

## Plan de Travail

**en classe :** Exo 32 p 145 ☐ Exo 33 p 145 ☐ Exo 34 p 145 ☐ Exo 35 p 145 ☐ Exo 36 p 145 ☐ Exo 37 p 145 ☐

**en autonomie :** Exo 15 ☐ Exo 16 ☐ Exo 17 ☐ Exo 18 ☐

**En Vidéo** : Appliquer les théorèmes

## Plan de Travail : Sujets type Bac

Exo 19 ☐ Exo 20 ☐ Exo 21 ☐ Exo 22 ☐

Plan de travail

# Limites de suites

2 ANALYSE

## Définition

**Exercice 1**

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note

$$u_n = \begin{cases} 1 & \text{si } n \text{ est premier} \\ n^2 & \text{sinon} \end{cases}.$$

A-t-on $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$ ?

**Exercice 2**

On considère la suite $(u_n)$ définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par $u_n = \dfrac{3n+6}{n+1}$.

1) Donner des valeurs approchées au centième de $u_{10}$, $u_{100}$, $u_{1000}$
2) La suite $(u_n)$ semble-t-elle convergente ? Quelle serait sa limite ?
3) Montrer que pour $n \in \mathbb{N}$, $u_n - 3 = \dfrac{3}{n+1}$. Quel est le signe de cette quantité ?
4) Soit $\varepsilon > 0$. Résoudre l'inéquation $u_n - 3 < \varepsilon$, d'inconnue $n \in \mathbb{N}$. Conclure

**Exercice 3**

Pour tout entier naturel $n$, on pose $u_n = (-1)^n$.
La suite $(u_n)$ semble-t-elle avoir une limite ?

## Suites géométriques et suites monotones

**Exercice 4**

Calculer les limites des suites ci-dessous, définies pour tout entier naturel $n$.

1) $u_n = -3 \times \left(-\frac{1}{4}\right)^n$
2) $v_n = 1 + 2 \times 0,99^n$
3) $w_n = 5 \times 1,99^n + 12$
4) $z_n = 8 + \sqrt{3}\left(-\frac{7}{8}\right)^n$

**Exercice 5**

Calculer les limites des suites ci-dessous, définies pour tout entier naturel $n$.

1) $u_n = \dfrac{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n}{1 - \frac{1}{2}}$
2) $v_n = 1 + \dfrac{1 - \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^n}{1 - \frac{\sqrt{2}}{2}}$

**Exercice 6**

Soit $n$ un entier naturel. Déterminer la limite de la suite $(u_n)$ dans chacun des cas suivants.

$u_n = \sum\limits_{k=0}^{n} \dfrac{1}{2^k}$ $v_n = \sum\limits_{k=0}^{n} \dfrac{1}{3^k}$ $w_n = \sum\limits_{k=0}^{n} \dfrac{8}{4^k}$

**Exercice 7**

On considère la suite $(u_n)$ définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par : $u_0 = 10$ et $u_{n+1} = \frac{1}{4}u_n + 6$.

1) Conjecturer le sens de variation de la suite $(u_n)$.
2) Prouver par récurrence que $u_n \geq 8$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
3) Justifier que, pour tout $n \in \mathbb{N}$ :
$$u_{n+1} - u_n = -\frac{3}{4}u_n + 6.$$
4) Conclure sur le sens de variation de la suite.
5) La suite $(u_n)$ est-elle convergente ?

**Exercice 8**

On considère la suite $(u_n)$ définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par : $u_0 = 5$ et $u_{n+1} = \frac{1}{2}u_n + 2$.

1) Prouver par récurrence que, pour tout $n \in \mathbb{N}$ : $u_n \geq 4$.

2) Justifier que, pour tout $n \in \mathbb{N}$ :
$u_{n+1} - u_n = -\frac{1}{2}u_n + 2$.
3) Conclure sur le sens de variation de la suite.
4) La suite $(u_n)$ est-elle convergente ?

## Opérations sur les limites

**Exercice 9**

Dans chacun des cas suivants, déterminer la limite, si elle existe, de la suite $(u_n)$ définie pour tout entier naturel non nul $n$,

1) $u_n = n^2 + \sqrt{n}$
2) $u_n = \frac{1}{n} - n^3$
3) $u_n = e^{-n} + 3n$
4) $u_n = \frac{1}{n} + \frac{1}{n^2} + n$
5) $u_n = -6n^2 + 1 + \frac{1}{n}$
6) $u_n = \frac{1+n}{n}$

**Exercice 10**

Dans chacun des cas suivants, déterminer la limite, si elle existe, de la suite $(u_n)$ définie pour tout entier naturel non nul $n$,

1) $u_n = (2n+1)\left(\frac{1}{n} + 2\right)$
2) $u_n = \left(3 + \frac{2}{n}\right)\left(\frac{5}{n^2} - 2\right)$
3) $u_n = \sqrt{n} - n^2\sqrt{n}$
4) $u_n = \frac{e^n}{1 + \frac{1}{n}}$
5) $u_n = \frac{6 + \frac{3}{n^2}}{\frac{5}{n} - 1}$
6) $u_n = \frac{-1 + \frac{3}{n}}{\frac{1}{n^2}}$

**Exercice 11**

Dans chacun des cas suivants, déterminer la limite, si elle existe, de la suite $(u_n)$ définie pour tout entier naturel non nul $n$,

1) $u_n = n^2 - n$
2) $u_n = \left(1 - \frac{1}{n}\right)\left(2 + \frac{3}{n^2}\right)$
3) $u_n = \frac{3 + \sqrt{n}}{1 + \frac{2}{n}}$
4) $u_n = -2n^2 - \frac{5}{n+1}$
5) $u_n = \frac{5}{-1-n}$
6) $u_n = (3n+1)\left(\frac{1}{n} - 2\right)$

## Formes indéterminées

**Exercice 12**

En factorisant par le terme dominant, déterminer la limite de la suite $(u_n)$ dans chacun des cas suivants.

1) $u_n = \frac{3n^3 + 2n - 5}{2 - 4n^3}$
2) $u_n = \frac{n^2+1}{n+3}$
3) $u_n = \frac{1 - 2n^3}{n^2 - 3n^3}$
4) $u_n = \frac{1 - 6n^4}{5n^6 + 2n^2 + 1}$
5) $u_n = \frac{n^2 - \frac{1}{n^4}}{n^3 + 3}$ pour $n > 0$

**Exercice 13**

Déterminer la limite de la suite $(u_n)$ dans chacun des cas suivants

1) $u_n = \sqrt{n-3} - \sqrt{n+8}$
2) $u_n = \sqrt{n+2} + \sqrt{2n+5}$
3) $u_n = \frac{1}{\sqrt{n+1} - \sqrt{n+2}}$

**Exercice 14**

Pour tout entier naturel $n > 1$, on pose $u_n = \sqrt{n^2 + 3n - 2} - \sqrt{n^2 - n - 1}$. Déterminer, si elle existe, la limite en $+\infty$ de la suite $(u_n)$.

## Théorèmes

**Exercice 15**

Soit $(u_n)$ la suite définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par $u_n = n^2 + \sin(n)$.
Démontrer que $(u_n)$ diverge vers $+\infty$.

**Exercice 16**

Soit $(u_n)$ la suite définie pour tout entier $n$ par la relation : $u_n = \frac{n^2 + \sin(n)}{n+5}$

Montrer que pour tout $n \geq 0$, on a $u_n \geq \frac{n^2 - 1}{n+5}$

En déduire $\lim\limits_{n \to +\infty} \frac{n^2 + \sin(n)}{n+5}$

**Exercice 17**

Calculer $\lim\limits_{n \to +\infty} \frac{(-1)^n}{n+2}$

**Exercice 18**

Soit $(u_n)$ la suite définie pour tout entier non-nul $n$ par la relation : $u_n = 5 - \frac{\sin(n^2)}{2\sqrt{n}}$. Calculer $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n$

## Synthèse

**Exercice 19 : Suite auxiliaire**

On considère la suite $(u_n)$ définie par

$$\begin{cases} u_0 = 1 \\ \text{Pour tout entier naturel } n,\ u_{n+1} = \dfrac{9}{6 - u_n} \end{cases}$$

1) Calculer $u_1$ et $u_2$
2) Montrer par récurrence que pour tout entier naturel $n$, $0 < u_n < 3$
3) Pour tout entier naturel $n$, on pose $a_n = \frac{1}{3 - u_n}$
   a) Justifier que pour tout entier naturel $n$, $u_n = \frac{3a_n - 1}{a_n}$.
   b) Montrer que pour tout entier naturel $n$, $a_{n+1} = a_n + \frac{1}{3}$. Pour cela, on exprimera $a_{n+1}$ en fonction de $u_{n+1}$, puis en fonction de $u_n$, puis en fonction de $a_n$.

c) En déduire que la suite $(a_n)$ est arithmétique. Préciser sa raison et son premier terme.

d) Exprimer $a_n$ puis $u_n$ en fonction de $n$ pour tout entier naturel $n$.

e) Quelle est la limite de la suite $(u_n)$ lorsque $n$ tend vers $+\infty$ ?

**Exercice 20 : Nouvelle-Calédonie – Août 2023**

On considère la suite $(u_n)$ telle que $u_0 = 0$ et, pour tout entier naturel $n$, $u_{n+1} = \dfrac{-u_n - 4}{u_n + 3}$

Soit $(v_n)$ la suite définie pour tout entier naturel $n$ par $v_n = \dfrac{1}{u_n + 2}$.

1) Donner $v_0$

2) Montrer que la suite $(v_n)$ est arithmétique. On précisera son premier terme et sa raison.

3) En déduire une expression de $v_n$ en fonction de $n$ pour tout entier naturel $n$

4) En déduire que pour tout entier naturel $n$, $u_n = \dfrac{1}{n + 0.5} - 2$.

5) Déterminer alors $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n$.

**Exercice 21**

On considère la suite $(u_n)$ définie par $u_0 = 2$ et, pour tout entier naturel $n$, $u_{n+1} = \dfrac{3u_n - 2}{2u_n - 1}$.

1) On considère la fonction $f : x \mapsto \dfrac{3x - 2}{2x - 1}$. Déterminer le sens de variations de $f$ sur son domaine de définition.

2) Montrer par récurrence que, pour tout entier naturel $n$, $u_n > 1$

3) Pour tout entier naturel $n$, on pose $v_n = \dfrac{1}{u_n - 1}$

   a) Montrer que pour tout entier naturel $n$, $v_{n+1} - v_n = 2$

   b) En déduire une expression de $v_n$ puis de $u_n$ pour tout entier naturel $n$

   c) Déterminer alors $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n$.

**Exercice 22 : Nouvelle-Calédonie – Août 2023 - 2**

On considère la suite $(u_n)$ définie par $u_0 = 3$ et, pour tout entier naturel $n$, par : $u_{n+1} = 5u_n - 4n - 3$.

1) a) Démontrer que $u_1 = 12$.

   b) Déterminer $u_2$ en détaillant le calcul.

   c) À l'aide de la calculatrice, conjecturer le sens de variation ainsi que la limite de la suite $(u_n)$.

2) a) Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel $n$, on a : $u_n \geqslant n + 1$.

   b) En déduire la limite de la suite $(u_n)$.

3) On considère la suite $(v_n)$ définie pour tout entier naturel $n$ par : $v_n = u_n - n - 1$.

   a) Démontrer que la suite $(v_n)$ est géométrique. Donner sa raison et son premier terme $v_0$.

   b) En déduire, pour tout entier naturel $n$, l'expression de $v_n$ en fonction de $n$.

   c) En déduire que pour tout entier naturel $n$ : $u_n = 2 \times 5^n + n + 1$.

   d) En déduire le sens de variation de la suite $(u_n)$.

4) On considère la fonction ci-contre, écrite de manière incomplète en langage Python et destinée à renvoyer le plus petit entier naturel $n$ tel que $u_n \geqslant 10^7$.

```
def suite() :
    u = 3
    n = 0
    while ... :
        u = ...
        n = n + 1
    return n
```

   a) Recopier le programme et compléter les deux instructions manquantes.

   b) Quelle est la valeur renvoyée par cette fonction ?

Accès corrections

(Correction)

**Corrigé de l'exercice 1**

Cette suite tend pas vers $+\infty$. En effet, on rappelle qu'il existe une infinité de nombres premiers, et donc une infinité de valeur de $n$ pour lesquels $u_n = 1$. Prenons en particulier $A = 2$ dans la définition de la limite infinie. On a donc que, pour tout $N$, il existe un rang $n \geqslant N$ tel que $u_n < 2$ : il n'est pas possible d'avoir tous les termes de la suite supérieurs à 2 à partir d'un certain rang. La limite de la suite ne peut donc être $+\infty$.

**Corrigé de l'exercice 2**

On a $u_{10} = \dfrac{36}{11} \simeq 3.272$, $u_{100} = \dfrac{306}{101} \simeq 3.030$, $u_{1000} = \dfrac{3006}{1001} \simeq 3.003$. Il semblerait que la suite $(u_n)$ soit convergente, de limite 3.

Pour $n \in \mathbb{N}$, $u_n - 3 = \dfrac{3n+6}{3+1} - \dfrac{3(n+1)}{n+1} = \dfrac{3n+6-3n-3}{n+1} = \dfrac{3}{n+1}$. Puisque cette valeur est positive, on a $|u_n - 3| = u_n - 3 = \dfrac{3}{n+1}$

Soit $\varepsilon > 0$. On a $|u_n - 3| < \varepsilon \Leftrightarrow \dfrac{3}{n+1} < \varepsilon \Leftrightarrow \dfrac{n+1}{3} > \dfrac{1}{\varepsilon} \Leftrightarrow n > \dfrac{3}{\varepsilon} - 1$

Ainsi, pour tout $\varepsilon > 0$, dès que $n > \dfrac{3}{\varepsilon} - 1$, on a $|u_n - 3| < \varepsilon$. Ainsi, la suite $(u_n)$ est convergente et $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 3$.

**Corrigé de l'exercice 3**

Les termes de rang pair de cette suite valent 1 alors que les termes de rang impair valent -1. Cette suite n'admet pas de limite.

**Corrigé de l'exercice 9**

**a.** On sait que $\lim\limits_{n\to+\infty} n^2 = +\infty$, $\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt{n} = +\infty$.

Ainsi, d'après les règles de la limite de la somme, $\lim\limits_{n\to+\infty} n^2 + \sqrt{n} = +\infty$

**b.** On sait que $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{n} = 0$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} -n^3 = -\infty$.

Ainsi, d'après les règles de la limite de la somme, $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(\dfrac{1}{n} - n^3\right) = -\infty$

**c.** On sait que $\lim\limits_{n\to+\infty} e^{-n} = 0$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} (3n) = +\infty$.

Ainsi, d'après les règles de la limite de la somme, $\lim\limits_{n\to+\infty} (e^{-n} + 3n) = +\infty$

**d.** On sait que $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{n} = 0$, $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{n^2} = 0$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} n = +\infty$.

Ainsi, d'après les règles de la limite de la somme, $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(\dfrac{1}{n} + \dfrac{1}{n^2} + n\right) = +\infty$

**e.** On sait que $\lim\limits_{n\to+\infty} -n^2 = -\infty$, $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{n} = 0$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} 1 = 1$.

Ainsi, d'après les règles de la limite de la somme, $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(-6n^2 + 1 + \dfrac{1}{n}\right) = -\infty$

**f.** Pour tout entier naturel non nul $n$, $\dfrac{n+1}{n} = \dfrac{1}{n} + \dfrac{n}{n} = 1 + \dfrac{1}{n}$. On sait que $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{n} = 0$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} 1 = 1$.

Ainsi, d'après les règles de la limite de la somme, $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(\dfrac{1+n}{n}\right) = 1$

**Corrigé de l'exercice 10**

**g.** D'une part, $\lim\limits_{n\to+\infty} (2n+1) = +\infty$. D'autre part, $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{n} = 0$ d'où $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(\dfrac{1}{n} + 2\right) = 2$.

Ainsi, d'après les règles de calcul de la limite d'un produit, $\lim\limits_{n\to+\infty} (2n+1)\left(\dfrac{1}{n} + 2\right) = +\infty$.

**h.** On a $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{2}{n} = 0$, d'où $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(3 + \dfrac{2}{n}\right) = 3$. D'autre part, $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{5}{n^2} = 0$ d'où $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(\dfrac{5}{n^2} - 2\right) = -2$. Finalement, par produit de limites, $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(3 + \dfrac{2}{n}\right)\left(\dfrac{5}{n^2} - 2\right) = 3 \times (-2) = -6$.

**i.** Si l'on fait la limite de chaque terme de la somme, on aboutit à une forme indéterminée, de type "$\infty - \infty$". Il faut donc factoriser $u_n$. Pour tout entier $n$, $u_n = \sqrt{n}(1 - n^2)$. Or, $\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt{n} = +\infty$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} (1 - n^2) = -\infty$. Ainsi, $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = -\infty$.

**j.** D'une part, $\lim\limits_{n\to+\infty} e^n = +\infty$. D'autre part, $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{n} = 0$ d'où $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(1 + \dfrac{1}{n}\right) = 1$.

Finalement, $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{e^n}{1 + \dfrac{1}{n}} = +\infty$

**k.** On a, $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{3}{n^2} = 0$ d'où $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(6 + \dfrac{3}{n^2}\right) = 6$. D'autre part, $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{5}{n} = 0$ d'où $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(\dfrac{5}{n} - 1\right) = -1$. Finalement, $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{6 + \dfrac{3}{n^2}}{\dfrac{5}{n} - 1} = \dfrac{6}{-1} = -6$.

**l.** D'une part, $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{3}{n}=0$, d'où $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(1+\dfrac{3}{n}\right)=1$. Par ailleurs, $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{1}{n^2}=0$ par valeurs supérieures. Ainsi, $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{1+\dfrac{3}{n}}{\dfrac{1}{n^2}}=+\infty$. Il est également possible de remarquer que dans ce cas, pour nous $n>0$, $u_n=n^2\left(1+\dfrac{3}{n}\right)$ et utiliser les règles de calcul sur un produit.

**Corrigé de l'exercice 11**

**m.** Si l'on fait la limite de chaque terme de la somme, on aboutit à une forme indéterminée, de type "$\infty-\infty$". Il faut donc factoriser $u_n$. Pour tout entier naturel $n$, $u_n=n(n-1)$. Or, $\lim\limits_{n\to+\infty}n=+\infty$ et $\lim\limits_{n\to+\infty}(n+1)=+\infty$. Ainsi, $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n=+\infty$.

**n.** D'une part, $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(1-\dfrac{1}{n}\right)=1$. D'autre part, $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(2+\dfrac{3}{n^2}\right)=2$.
Ainsi, par limite du produit, $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n=2$

**o.** D'une part, $\lim\limits_{n\to+\infty}(3+\sqrt{n})=+\infty$. D'autre part, $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(1+\dfrac{2}{n}\right)=1$. Finalement, $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n=+\infty$.

**p.** D'une part, $\lim\limits_{n\to+\infty}(-2n^2=-\infty$. D'autre part, $\lim\limits_{n\to+\infty}-\dfrac{5}{n}=0$. Ainsi, $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n=-\infty$

**q.** Puisque $\lim\limits_{n\to+\infty}(-1-n)=-\infty$, on a $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n=0$.

**r.** D'une part, $\lim\limits_{n\to+\infty}(3n+1)=+\infty$. D'autre part, $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\dfrac{1}{n}-2\right)=-2$. Ainsi, en utilisant la règle des limites sur les produits, $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n=-\infty$ (ne pas oublier la règle des signes).

**Corrigé de l'exercice 12**

**a.** Pour tout entier naturel non nul $n$, $\dfrac{3n^3+2n-5}{2-4n^3}=\dfrac{n^3\left(3+\dfrac{2}{n^2}-\dfrac{5}{n^3}\right)}{n^3\left(\dfrac{2}{n^3}-4\right)}=\dfrac{3+\dfrac{2}{n^2}-\dfrac{5}{n^3}}{\dfrac{2}{n^3}-4}$.

En appliquant les règles de calcul classiques sur les limites, on en déduit que $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{3n^3+2n-5}{2-4n^3}=-\dfrac{3}{4}$

**b.** Pour tout entier naturel non nul $n$, $\dfrac{n^2+1}{n+3}=\dfrac{n^2\left(1+\dfrac{1}{n^2}\right)}{n\left(1+\dfrac{3}{n}\right)}=n\times\dfrac{1+\dfrac{1}{n^2}}{1+\dfrac{3}{n}}$

Or, $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{1+\dfrac{1}{n^2}}{1+\dfrac{3}{n}}=1$ et $\lim\limits_{n\to+\infty}n=+\infty$. Ainsi, $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{n^2+1}{n+3}=+\infty$

**c.** Pour tout entier naturel non nul $n$, $\dfrac{1-2n^3}{n^2-3n^3}=\dfrac{n^3\times\left(\dfrac{1}{n^3}-2\right)}{n^3\times\left(\dfrac{1}{n}-3\right)}=\dfrac{\dfrac{1}{n^3}-2}{\dfrac{1}{n}-3}$.

Ainsi, $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{1-2n^3}{n^2-3n^3}==\dfrac{-2}{-3}=\dfrac{2}{3}$

**d.** Pour tout entier naturel non nul $n$, $\dfrac{1-6n^4}{5n^6+2n^2+1}=\dfrac{n^4\left(\dfrac{1}{n^4}-6\right)}{n^6\left(5+\dfrac{2}{n^4}+\dfrac{1}{n^6}\right)}=\dfrac{1}{n^2}\times\dfrac{\dfrac{1}{n^4}-6}{5+\dfrac{2}{n^4}+\dfrac{1}{n^6}}$.

Or, $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{\dfrac{1}{n^4}-6}{5+\dfrac{2}{n^4}+\dfrac{1}{n^6}}=-\dfrac{6}{5}$ et $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{1}{n^2}=0$. Ainsi, $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{1-6n^4}{5n^6+2n^2+1}=0$

**f.** Pour tout entier naturel non nul $n$, $\dfrac{n^2-\dfrac{1}{n^4}}{n^3+3}=\dfrac{n^2\times\left(1-\dfrac{1}{n^6}\right)}{n^3\times\left(1+\dfrac{3}{n^3}\right)}=\dfrac{1}{n}\times\dfrac{1-\dfrac{1}{n^6}}{1+\dfrac{3}{n^3}}$.

Or, $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{1}{n}=0$, $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(1-\dfrac{1}{n^6}\right)=1$ et $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(1+\dfrac{3}{n^3}\right)=1$. Ainsi, $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{n^2-\dfrac{1}{n^4}}{n^3+3}=0$

**Corrigé de l'exercice 13**

**a.** Pour tout entier naturel $n>3$,

$$\sqrt{n-3}-\sqrt{n+8}=(\sqrt{n-3}-\sqrt{n+8})\times\frac{\sqrt{n-3}+\sqrt{n+8}}{\sqrt{n-3}+\sqrt{n+8}}=\frac{n-3-(n+8)}{\sqrt{n-3}+\sqrt{n+8}}$$

et donc

$$\sqrt{n-3}-\sqrt{n+8}=-\frac{11}{\sqrt{n-3}+\sqrt{n+8}}$$

Ainsi, $\lim\limits_{n\to+\infty} (\sqrt{n-3} - \sqrt{n+8}) = 0$.
**b.** Attention à ne pas se lancer dans des calculs par pur automatisme, il ne s'agit pas ici d'une forme indéterminée ! $\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt{n+2} + \sqrt{2n+5} = +\infty$.
**c.** Pour tout entier naturel $n$,

$$u_n = \frac{1}{\sqrt{n+1} - \sqrt{n+2}} \times \frac{\sqrt{n+1} + \sqrt{n+2}}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n+2}} = \frac{\sqrt{n+1} + \sqrt{n+2}}{(n+1) - (n+2)} = \frac{\sqrt{n+1} + \sqrt{n+2}}{-1}$$

Or, $\lim\limits_{n\to+\infty} (\sqrt{n+1} + \sqrt{n+2}) = +\infty$ et donc $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = -\infty$.
**Corrigé de l'exercice 14**
Pour tout entier naturel non nul $n$,

$$u_n = \sqrt{n^2+3n-2} - \sqrt{n^2-n-1} \times \frac{\sqrt{n^2+3n-2} + \sqrt{n^2-n-1}}{\sqrt{n^2+3n-2} + \sqrt{n^2-n-1}}$$

En développant le numérateur, on a alors

$$u_n = \frac{n^2+3n-2-(n^2-n-1)}{\sqrt{n^2+3n-2} + \sqrt{n^2-n-1}} = \frac{4n-1}{\sqrt{n^2+3n-2} + \sqrt{n^2-n-1}}$$

On a en effet

$$\sqrt{n^2+3n-2} = \sqrt{n^2} \times \sqrt{1 + \frac{3}{n} - \frac{2}{n^2}} = n\sqrt{1 + \frac{3}{n} - \frac{2}{n^2}}$$

et

$$\sqrt{n^2-n-1} = \sqrt{n^2} \times \sqrt{1 - \frac{1}{n} - \frac{1}{n^2}} = n\sqrt{1 - \frac{1}{n} - \frac{1}{n^2}}$$

Ainsi

$$u_n = \frac{n\left(4 - \frac{1}{n}\right)}{n\left(\sqrt{1 + \frac{3}{n} - \frac{2}{n^2}} + \sqrt{1 - \frac{1}{n} - \frac{1}{n^2}}\right)} = \frac{4 - \frac{1}{n}}{\sqrt{1 + \frac{3}{n} - \frac{2}{n^2}} + \sqrt{1 - \frac{1}{n} - \frac{1}{n^2}}}$$

Or, $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(4 + \frac{3}{n}\right) = 4$, $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(\sqrt{1 + \frac{3}{n} - \frac{2}{n^2}}\right) = 1$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(\sqrt{1 - \frac{1}{n} - \frac{1}{n^2}}\right) = 1$.
Ainsi, $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(\sqrt{n^2+3n-2} - \sqrt{n^2-n-1}\right) = \frac{4}{1+1} = 2$
**Corrigé de l'exercice 15**
**Corrigé de l'exercice 16**
**Corrigé de l'exercice 17**
**Corrigé de l'exercice 18**
**Corrigé de l'exercice 19**
$u_1 = \frac{9}{6-1} = \frac{9}{5}$, $u_2 = \frac{9}{6 - \frac{9}{5}} = \frac{9}{\frac{21}{5}} = \frac{45}{21} = \frac{15}{7}$
Pour tout entier naturel $n$, on pose $P(n)$ : « $0 < u_n < 3$ »

- **Initialisation** : Puisque $u_0 = 1$, on a bien $0 < u_0 < 3$. $P(0)$ est vraie.
- **Hérédité** : Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons $P(n)$ vraie. Ainsi, $0 < u_n < 3$ En multipliant par $-1$, qui est négatif, on a donc $0 > -u_n > -3$.
  On ajoute 6 pour avoir $6 > 6 - u_n > 3$. On applique alors la fonction inverse qui est décroissante sur $]0; +\infty[$. On a donc $\frac{1}{6} < \frac{1}{6-u_n} < \frac{1}{3}$. Enfin, on multiplie par 9 pour obtenir $\frac{3}{2} < \frac{9}{6-u_n} < 3$. Or, puisque $0 < \frac{3}{2}$, on a bien $0 < u_{n+1} < 3$. $P(n+1)$ est vraie.
- **Conclusion** : $P(0)$ est vraie, $P$ est héréditaire. Par récurrence, $P(n)$ est vraie pour tout entier naturel $n$.

Soit $n \in \mathbb{N}$. On a $a_n = \frac{1}{3-u_n}$. Puisque $a_n \neq 0$, on peut appliquer la fonction inverse à cette égalité. On a alors $\frac{1}{a_n} = 3 - u_n$.
Ainsi, $u_n = 3 - \frac{1}{a_n} = \frac{3a_n - 1}{a_n}$
Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $a_n = \frac{1}{3-u_n}$. Ainsi, $a_{n+1} = \frac{1}{3-u_{n+1}}$.

Or, $u_{n+1}=\dfrac{9}{6-u_n}$. Ainsi $a_{n+1}=\dfrac{1}{3-\dfrac{9}{6-u_n}}=\dfrac{6-u_n}{9-3u_n}$.

Or, d'après la question précédente, $u_n=\dfrac{3a_n-1}{a_n}$. Ainsi, $a_{n+1}=\dfrac{6-\dfrac{3a_n-1}{a_n}}{9-3\times\dfrac{3a_n-1}{a_n}}=\dfrac{\dfrac{6a_n-(3a_n-1)}{a_n}}{\dfrac{9a_n-3\times(3a_n-1)}{a_n}}$.

On a donc $a_{n+1}=\dfrac{3a_n+1}{a_n}\times\dfrac{a_n}{3}=\dfrac{3a_n+1}{3}=a_n+\dfrac{1}{3}$.

La suite $(a_n)$ est donc arithmétique de raison $r=\dfrac{1}{3}$. Son premier terme vaut $a_0=\dfrac{1}{3-u_0}=\dfrac{1}{3-1}=\dfrac{1}{2}$. On rappelle que si $(a_n)$ est une suite arithmétique de raison $r$, alors pour tout entier naturel $n$, $a_n=a_0+rn$. Dans notre cas, pour tout entier naturel $n$, $a_n=\dfrac{1}{2}+\dfrac{n}{3}$

On sait que pour tout entier naturel $n$, $u_n=\dfrac{3a_n-1}{a_n}$. Ainsi, pour tout entier naturel $n$

$$u_n=\frac{3\times\left(\frac{1}{2}+\frac{n}{3}\right)-1}{\frac{1}{2}+\frac{n}{3}}=\frac{\frac{3}{2}+n-1}{\frac{3+2n}{6}}=\frac{6\times\left(n+\frac{1}{2}\right)}{3+2n}=\frac{6n+3}{3+2n}$$

En utilisant les règles sur les calculs de limites, on aboutit à une forme indéterminée $\dfrac{\infty}{\infty}$.

Or, pour tout entier naturel non nul $n$, $u_n=\dfrac{n\left(6+\frac{3}{n}\right)}{n\left(\frac{3}{n}+2\right)}=\dfrac{6+\frac{3}{n}}{\frac{3}{n}+2}$

Finalement, $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n=\dfrac{6}{2}=3$.

**Corrigé de l'exercice 20**

On a $v_0=\dfrac{1}{u_0+2}=\dfrac{1}{2}$

Pour tout entier naturel $n$, on a $v_n=\dfrac{1}{u_n+2}$ et donc $v_{n+1}=\dfrac{1}{u_{n+1}+2}$.

Or, $u_{n+1}=\dfrac{-u_n-4}{u_n+3}$. On remplace donc $u_{n+1}$ par cette valeur. Ainsi,

$$v_{n+1}=\frac{1}{\frac{-u_n-4}{u_n+3}+2}=\frac{1}{\frac{-u_n-4}{u_n+3}+\frac{2(u_n+3)}{u_n+3}}=\frac{1}{\frac{-u_n-4}{u_n+3}+\frac{2u_n+6)}{u_n+3}}=\frac{1}{\frac{-u_n-4+2u_n+6}{u_n+3}}=\frac{1}{\frac{u_n+2}{u_n+3}}=\frac{u_n+3}{u_n+2}$$

Ainsi,

$$v_{n+1}-v_n=\frac{u_n+3}{u_n+2}-\frac{1}{u_n+2}=\frac{u_n+2}{u_n+2}=1$$

Finalement, pour tout entier naturel $n$, $v_{n+1}=1+v_n$. La suite $(v_n)$ est arithmétique de raison 1.

Pour tout entier naturel $n$, on a donc $v_n=v_0=n\times1$ soit $v_n=\dfrac{1}{2}+n$.

Pour tout entier naturel $n$, on a $v_n=\dfrac{1}{u_n+2}$. Ainsi, $\dfrac{1}{v_n}=u_n+2$ et $u_n=\dfrac{1}{v_n}-2=\dfrac{1}{n+0.5}-2$.

Par ailleurs, $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{1}{n+0.5}=0$ et donc $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n=-2$.

**Corrigé de l'exercice 21**

On considère la suite $(u_n)$ définie par $u_0=2$ et, pour tout entier naturel $n$, $u_{n+1}=\dfrac{3u_n-2}{2u_n-1}$.

$f$ est dérivable sur $\left]-\infty;\dfrac{1}{2}\right[$ et $\left]\dfrac{1}{2};+\infty\right[$. Pour tout réel $x\neq\dfrac{1}{2}$,

$$f'(x)=\frac{3(2x-1)-2(3x-2)}{(2x-1)^2}=\frac{6x-3-6x+4}{(2x-1)^2}=\frac{1}{(2x-1)^2}>0$$

$f$ est donc strictement croissante sur $\left]-\infty;\dfrac{1}{2}\right[$ et $\left]\dfrac{1}{2};+\infty\right[$

Pour tout entier naturel $n$, on considère la proposition $P(n)$ : « $u_n>1$ ».

- Initialisation : $u_0=2>0$. $P(0)$ est vraie.
- Hérédité : Soit $n\in\mathbb{N}$ tel que $P(n)$ est vraie. On a donc $u_n>1$. La fonction $f$ étant strictement croissante sur $\left[\dfrac{1}{2};+\infty\right[$, on a donc $f(u_n)>f(1)$. Or, $f(u_n)=u_{n+1}$ et $f(1)=\dfrac{3\times1-2}{2\times1-1}=1$. Ainsi, $u_{n+1}>1$. $P(n+1)$ est vraie.

- Conclusion : Par récurrence, $P(n)$ est vraie pour tout entier naturel $n$.

Puisque pour tout entier naturel $n$, $u_n > 1$, il en vient que $u_n - 1 \neq 0$ et la suite $(v_n)$ est donc bien définie.
Pour tout entier naturel $n$,

$$v_{n+1} - v_n = \frac{1}{u_{n+1} - 1} - \frac{1}{u_n - 1} = \frac{1}{\frac{3u_n - 2}{2u_n - 1} - 1} - \frac{1}{u_n - 1} = \frac{1}{\frac{3u_n - 2 - (2u_n - 1)}{2u_n - 1}} - \frac{1}{u_n - 1}$$

Ainsi,

$$v_{n+1} - v_n = \frac{2u_n - 1}{u_n - 1} - \frac{1}{u_n - 1} = \frac{2u_n - 2}{u_n - 1} = \frac{2(u_n - 1)}{u_n - 1} = 2$$

Finalement, pour tout entier naturel $n$, $v_{n+1} = 2 + v_n$. La suite $(v_n)$ est donc arithmétique de raison 2 et de premier terme $v_0 = \frac{1}{u_0 - 1} = \frac{1}{2 - 1} = 1$. Ainsi, pour tout entier naturel $n$, $v_n = 1 + 2n$.
Par ailleurs, $v_n = \frac{1}{u_n - 1}$ et donc $u_n = \frac{1}{v_n} + 1 = \frac{1}{1 + 2n} + 1$.
On en déduit que $\lim_{n \to +\infty} u_n = 1$.
**Corrigé de l'exercice 22**