Cours & méthodes

Équations du second degré

1 ANALYSE

Plan de Travail
Exo 1 ☐ Exo 2 ☐ Exo 3 ☐ Exo 4 ☐ Exo 5 ☐ Exo 6 ☐ Exo 7 ☐

1 Les équations du second degré déjà résolues en seconde

1.1 Résolution d'une équation de degré deux sous forme factorisée.

Propriété 1 : Résoudre une équation produit-nul - Niveau *

Un produit est nul si et seulement si au moins un de ses facteurs est nul.

Méthode 1 : Niveau *

Résoudre dans $\mathbb{R}$:

$$(3x-2)(2-5x)=0$$

Correction MathALÉA

Remarque 1

Avec cette propriété des équations produit-nul, on arrive à résoudre des équations du second degré sous forme factorisées.

Méthode 2 : Application pour résoudre une équation du second degré : Niveau *

1) Montrer que

$$(2x-3)(4-x)=-2x^2+11x-12$$

2) Résoudre dans $\mathbb{R}$:

$$-2x^2+11x-12=0$$

Correction

Plan de Travail
Exo 8 ☐ Exo 9 ☐

1.2 Résolution d'une équation de degré 2 sous forme non-factorisée

Méthode 3 : Résoudre une équation se ramenant au produit-nul - Cas n°1 - Niveau *

Quand l'expression n'est pas sous forme factorisée, on ne peut évidemment pas appliquer la propriété du produit-nul !! Il faut d'abord factoriser.

Résoudre dans $\mathbb{R}$:

$$(4-3x)^2-(4-3x)(6x+7)=0$$

Correction

Méthode 4 : Résoudre une équation se ramenant au produit-nul - Cas n°2 - Niveau *

Résoudre dans $\mathbb{R}$:

- $x^2-9=0$
- $x^2+49=0$
- $(x-3)^2-(5-3x)^2=0$
- $2x^2-5=0$
- $(x-3)^2-25=0$
- $(5x-1)^2=3^2$

Correction

Plan de Travail

Exo 10 ☐ Exo 11 ☐ Exo 12 ☐ Exo 13 ☐ Exo 14 ☐
Exo 15 ☐ Exo 16 ☐

QCM n°1 :

2 Résolution d'une équation du second degré :

2.1 Factoriser avec la forme canonique :

Activité 1 : On monte d'un cran Niveau **

Essayez de résoudre l'équation $x^2+8x+2=0$. Travail seul 5 minutes puis mise en commun en groupe.

Méthode 5 : Résoudre une équation quelconque du second degré - Niveau **

Résoudre dans $\mathbb{R}$:

$$x^2+8x+2=0$$

Correction

Remarque 2 : Forme canonique

En écrivant $x^2+8x+2=(x+4)^2-14$, on a transformé la forme développée du polynôme en une autre forme, que l'on appelle **forme canonique**.
Cette forme est essentielle, il faut bien la connaître. Elle est la clé de la résolution des équations du second degré.
Elle sera définie rigoureusement juste après.

Plan de Travail

Exo 17 ☐ Exo 18 ☐ Exo 19 ☐ Exo 20 ☐ Exo 21 ☐ Exo 22 ☐

Méthode 6 : Résolution d'une équation du second degré avec la forme canonique

- Factoriser par le coefficient de x^2,
- Faire apparaître le début d'une une identité remarquable
- Écrire le polynôme de degré 2 sous forme canonique,
- Faire apparaître si possible une identité remarquable $a^2 - b^2$
- Factoriser.

Résoudre dans $\mathbb{R}$:

$$-2x^2 - 4x - 3 = 0$$

Correction MathALÉA

Définition 1 : Forme canonique - Niveau *

Soit P un polynôme de degré 2 défini sur $\mathbb{R}$ par $P(x) = ax^2 + bx + c$ avec $a \neq 0$.
Écrire P sous forme canonique, c'est trouver des réels α et β tels que :

$$P(x) = a(x - \alpha)^2 + \beta$$

Méthode 7 : Associer une forme développée et une forme canonique - Niveau *

Soit P, défini pour tout $x \in \mathbb{R}$, par :

$$P(x) = 3x^2 - 24x + 47$$

Montrer que la forme canonique de P est sous la forme :

$$P(x) = 3(x - 4)^2 - 1$$

Correction

QCM n°2 :

2.2 Mettre un polynôme sous forme canonique :

Méthode 8 : Déterminer algébriquement la forme canonique - Niveau : **

Soit l'expression $ax^2 + bx + c$, avec a, b, c des réels, dont a est non-nul.

Pour déterminer la forme canonique de $ax^2 + bx + c$:

1) Factoriser l'expression par le coefficient a.
2) Faire apparaître le début de l'identité remarquable $\left(x + \dfrac{b}{2a}\right)^2$
3) Réduire les termes constants.

Mettre sous forme canonique le polynôme P, qui s'écrit pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$P(x) = 3x^2 - 24x + 45$$

Correction vidéo

Propriété 2 : Détermination des coefficients de la forme canonique - Niveau *

Soit f une fonction polynôme de degré 2 définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = ax^2 + bx + c$ avec $a \neq 0$.

$$\text{En posant : } \quad \alpha = -\frac{b}{2a} \qquad \text{et} \qquad \beta = f(\alpha) = f\left(-\frac{b}{2a}\right) = -\frac{b^2 - 4ac}{4a}$$

On obtient pour tout réel x, $f(x) = a(x - \alpha)^2 + \beta$

Démonstration

Remarque 3 : Astuce !

La seule relation à connaître est $\alpha = -\dfrac{b}{2a}$.

On trouvera toujours β en utilisant $\beta = f(\alpha)$ sans connaître la formule $\beta = -\dfrac{b^2 - 4ac}{4a}$

Méthode 9 : Déterminer avec le cours la forme canonique - Niveau : *

Mettre sous forme canonique le polynôme P, qui s'écrit pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$P(x) = -3x^2 + 24x - 50$$

Correction

QCM n°3 :

Plan de Travail

Exo 23 ☐ Exo 24 ☐ Exo 25 ☐

3 Résolution des équations du second degré

Méthode 10 : Résoudre une équation du second degré avec la forme canonique - Niveau **

On peut soit utiliser les formules de cours (niveau 1), soit refaire la démonstration algébrique (niveau 2).

En utilisant la forme canonique du polynôme, résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation :

$$4x^2 + 36x + 80 = 0$$

Vidéo rédigée algébriquement.

Plan de Travail

Exo 26 ☐

Remarque 4

La méthode vue précédemment est importante à maîtriser, mais elle est répétitive.
Pour gagner du temps, on va procéder à une généralisation, qui va nous donner des formules, qui permettront d'effectuer plus rapidement cette procédure, et donc de gagner du temps.
Attention, n'oubliez jamais que derrière les formules qui arrivent, se cache la méthode de résolution avec la forme canonique.

Vidéo de cours

Propriété 3 : Les formules de cours à connaître : Niveau *

Soit S l'ensemble des solutions dans $\mathbb{R}$ de l'équation du second degré $ax^2 + bx + c = 0$ où a, b et c sont des réels fixés avec $a \neq 0$ et $\Delta = b^2 - 4ac$ le discriminant du trinôme.

- Si $\Delta < 0$ alors l'équation n'a pas de solution ; $S = \varnothing$.
- Si $\Delta = 0$ alors l'équation a une seule solution ; $S = \left\{-\dfrac{b}{2a}\right\}$.
- Si $\Delta > 0$ alors l'équation a deux solutions ; $S = \left\{\dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} ; \dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}\right\}$

Démonstration en vidéo

Démonstration pdf

QCM n°4 :

Méthode 11 : Résoudre une équation du second degré cas n°1 - Niveau *

Résoudre dans $\mathbb{R}$:

$$2x^2 + 3x - 4 = 0$$

Correction en vidéo

Méthode 12 : Résoudre une équation du second degré cas n°2 - Niveau *

Résoudre dans $\mathbb{R}$:

$$x^2 + x + 1 = 0$$

Correction en vidéo

Méthode 13 : Résoudre une équation du second degré cas n°3 - Niveau *

Résoudre dans $\mathbb{R}$:

$$6x^2 - 3 = 7x$$

Correction en vidéo

Plan de Travail

Exo 27 ☐ Exo 28 ☐ Exo 29 ☐ Exo 30 ☐ Exo 31 ☐ Exo 32 ☐ Exo 33 ☐
Exo 34 ☐ Exo 35 ☐

4 Compléments sur la résolution des équations du second degré :

4.1 Changement de variable

Méthode 14 : Changement de variables - Niveau **

Une stratégie classique en maths consiste à utiliser une variable annexe, qui simplifie l'énoncé, et permet de résoudre le problème en deux étapes.
Concrètement ici, on va poser $X = x^2$ et opérer un changement de variable, pour résoudre une équation en X.
Une fois les solutions en X trouvées, on reviendra à x pour retrouver les solutions de l'équation initiale.

Résoudre dans $\mathbb{R}$:

$$-2x^4 + 9x^2 - 4 = 0$$

Correction en vidéo

Méthode 15 : Changement de variables - Niveau ***

Résoudre dans $\mathbb{R}$:

$$-2x + 9\sqrt{x} - 4 = 0$$

Correction en vidéo

Méthode 16 : Changement de variables - Niveau ***

Résoudre dans $\mathbb{R}$:

$$-\frac{2}{x^2}+\frac{9}{x}-4=0$$

Correction en vidéo

Plan de Travail

Exo 36 ☐ Exo 37 ☐

4.2 Somme et produit de solutions.

Propriété 4 : Somme et Produit de solutions : Niveau **

Soit a, b et c trois réels, dont a non-nul.

Si l'équation $ax^2+bx+c=0$ admet deux solutions x_1 et x_2, alors $x_1+x_2=-\frac{b}{a}$ et $x_1x_2=\frac{c}{a}$

Propriété 5 : Autre formulation plus pratique ! - Niveau **

Si l'équation $x^2-Sx+P=0$ admet deux solutions x_1 et x_2, alors :

$$S=x_1+x_2 \qquad \text{et} \qquad P=x_1x_2$$

Démonstration pdf Démonstration vidéo

Méthode 17 : Utiliser somme et produit des racines. Cas simple - Niveau **

Déterminer une solution évidente de l'équation $x^2-7x-8=0$ puis, déterminer, sans utiliser le discriminant sa deuxième solution.

Correction en vidéo

Méthode 18 : Utiliser somme et produit des racines - Niveau **

Existe-t-il deux nombres réels dont la somme vaut 4 et le produit 13 ?

Correction en vidéo

Plan de Travail

Exo 38 ☐ Exo 39 ☐ Exo 40 ☐