Plan de travail

Vers le Second degré

1

1 Développer - Factoriser

Exercice 1

Développer et réduire les expressions suivantes.

1) $A = (5x+4)^2$ 2) $B = (4-3x)^2$

Exercice 2

Écrire sous forme développée : $A = -2(x-4)(x+4)$

Exercice 3

Développer et réduire les expressions suivantes.

1) $A = (2x+7)^2 - (3-x)^2$

2) $B = (4-3x)(4+3x) - (4x-3)^2$

Exercice 4

Développer et réduire les expressions suivantes.

1) $A = 3(x-4)^2 + 7$ 2) $B = -(x-2)^2 - 5$

Exercice 5

Factoriser les expressions suivantes.

1) $A = -3x^3 + 4x^2 - 5x$

2) $B = (2x-5)^2 - (3x-1)(2x-5)$

Exercice 6

Factoriser (si possible) les expressions suivantes.

1) $A = x^2 - 9$ 3) $C = 4x^2 + 25$

2) $B = (x-5)^2 - 16$ 4) $D = (1-2x)^2 - 1$

Exercice 7

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = 2x^2 - 4x - 30$$

1) Montrer que $f(x) = (2x+6)(x-5)$.

2) Montrer que $f(x) = (2x+2)(x-3) - 24$.

2 Équations

Exercice 8

Résoudre dans $\mathbb{R}$: $6x - 6 = -4x - 3$

Exercice 9

Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation suivante : $\dfrac{2}{7} = \dfrac{8}{x}$

Exercice 10

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes.

1) $x^2 = 9$ 3) $x^2 + 16 = 0$

2) $x^2 = 3$ 4) $3x^2 - 6 = 0$

Exercice 11

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes.

1) $2x^2 - 10x = 0$ 3) $x^2 + 2x + 1 = 0$

2) $x^2 - 36 = 0$ 4) $4x^2 - 12x + 9 = 0$

Exercice 12

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes :

1) $(9x+2)(x+6) - (9x+2)(-9x+5) = 0$

2) $(7x-2)(8x-5) = (7x-2)(-7x+1)$

Exercice 13

Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation : $(2x-3)^2 - 25 = 0$

Exercice 14

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 4x^2 - 7x + 1$. Résoudre $f(x) = 1$.

Exercice 15

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes :

1) $9x^2 - 6x + 4 = 0$ 3) $x^2 = 3x$

2) $(x+1)^2 - 7 = 0$ 4) $5 - (3-x)^2 = 0$

Exercice 16

Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation : $49(x-5)^2 - 4 = 0$

Test de validation :

Développer-Factoriser

Note : /10

Équations

Note : /10

Corrections :

Vers la forme canonique

Exercice 17

1) Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$:
$-3x^2 - 30x - 72 = -3(x+5)^2 + 3$

2) Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$:
$x^2 - 4x + 1 = (x-2)^2 - 3$

Exercice 18

On donne la fonction f définie pour tout $x \in \mathbb{R}$ par $f(x) = x^2 + 6x + 4$.
Développer $(x+3)^2$ et en déduire une écriture f, telle que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\;f(x) = (x+3)^2 + \beta$. On précisera la valeur de β

Exercice 19

On donne la fonction f définie pour tout $x \in \mathbb{R}$ par $f(x) = x^2 - 10x + 9$.
Déterminer une écriture de f, telle que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\;f(x) = (x-\alpha)^2 + \beta$. On précisera la valeur de α et de β.

Exercice 20

On donne la fonction f définie pour tout $x \in \mathbb{R}$ par $f(x) = 4x^2 + 24x + 96$.
Déterminer une écriture de f, telle que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\;f(x) = a(x+3)^2 + \beta$ où a et β sont des réels que l'on précisera.

Exercice 21

On donne une fonction f défini pour tout $x \in \mathbb{R}$ par $f(x) = -3x^2 + 12x + 5$.
Déterminer une écriture de f, telle que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = -3(x-\alpha)^2 + \beta$.
On précisera la valeur de α et de β.

Exercice 22

On donne une fonction f défini pour tout $x \in \mathbb{R}$ par $f(x) = 4x^2 + 40x + 96$.
Factoriser $f(x)$ par 4 puis en développant $(x+5)^2$ en déduire une écriture f, telle que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\;f(x) = 4(x+5)^2 + \beta$.
On précisera la valeur de β

Forme canonique

Exercice 23

On donne une fonction f défini pour tout $x \in \mathbb{R}$ par $f(x) = 4x^2 - 8x + 9$.
Déterminer une écriture de f, telle que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\;f(x) = a(x-\alpha)^2 + \beta$.
On précisera la valeur de a, α et de β.

Exercice 24

Déterminer, en appliquant les formules de cours, la forme canonique de chacun des polynômes P, défini pour tout $x \in \mathbb{R}$ par :

1) $P(x) = -4x^2 + 8x - 9$

2) $P(x) = x^2 - 8x + 20$

MathALÉA

Exercice 25

En effectuant la démonstration algébrique, déterminer la forme canonique de chacun des fonctions P, définie pour tout $x \in \mathbb{R}$ par :

1) $P(x) = -x^2 - 8x - 13$

2) $P(x) = -4x^2 + 24x - 35$

Exercice 26

Utiliser la forme canonique pour résoudre dans $\mathbb{R}$:

1) $3x^2 + 4x + 3 = 0$

2) $-4x^2 - 2x + 1 = 0$

3) $-x^2 + 5x + 3 = 0$

MathALÉA

Test de validation :

Forme canonique

Note : /3

Corrections :

Équations du second degré

Exercice 27

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes.

1) $-x^2 - 6x - 8 = 0$

2) $5x^2 + 10x + 10 = 0$

3) $4x^2 - 8x - 12 = 0$

MathALÉA

Exercice 28

Résoudre les équations suivantes :

1) $2x - 63 = -x^2$

2) $2x + 1 + 10x^2 = 0$

3) $-118 - 25x + 4x^2 = 10 + 6x^2 + 7x$

MathALÉA

Exercice 29

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :
$f(x) = x^2 + 2x - 8$.(*Forme développée*)

1) Montrer que $f(x)$ peut aussi s'écrire :
$f(x) = (x+4)(x-2)$. (*Forme factorisée*)

2) Montrer que $f(x)$ peut aussi s'écrire :
$f(x) = (x+1)^2 - 9$. (*Forme canonique*)

3) Répondre aux questions suivantes en utilisant l'écriture de $f(x)$ la mieux adaptée :
   a) Résoudre l'équation $f(x) = -9$.
   b) Résoudre l'équation $f(x) = 0$.
   c) Calculer $f(0)$, $f(-4)$ puis $f(-1)$.
   d) Résoudre l'équation $f(x) = -8$.

MathALÉA

Exercice 30

Déterminer, suivant la valeur du paramètre m, le **nombre de solutions** de l'équation du second degré :

$$x^2 - m - 2\ x - 2 = 0$$

MathALÉA

Exercice 31

Soit m un réel.
Déterminer, si elles existent, les valeurs de m pour que l'équation $x^2 + 3x + m^2 = 0$ admette 1 comme solution.

Mathsguyon

Exercice 32

Résoudre dans $\mathbb{R}$

$$5x^3 - 2x^2 + 5x = 0$$

Mathsguyon

Exercice 33

Résoudre dans $\mathbb{R}$

$$(x^2 - 3x + 5)(4x^2 - 5x + 1) = 0$$

Mathsguyon

Exercice 34

Résoudre dans $\mathbb{R}$

$$\frac{2x}{x^2+3} = 1$$

Mathsguyon

Exercice 35

Résoudre dans $\mathbb{R}$

$$\frac{3}{x} - \frac{1}{2x-1} = 1$$

Mathsguyon

Exercice 36

Résoudre dans $\mathbb{R}$

$$3x^4 + 5x^2 - 1 = 0$$

Mathsguyon

Exercice 37

Résoudre dans $\mathbb{R}$

$$4x - 3\sqrt{x} - 1 = 0$$

Mathsguyon

Exercice 38

Déterminer une équation du second degré, ayant 3 et 7 comme solutions.

Mathsguyon

Exercice 39

Déterminer deux nombres réels dont la somme est 12 et le produit -2.

Mathsguyon

Exercice 40

Existe-t-il un rectangle d'aire 20 et de périmètre 8 ?

Mathsguyon

Test de validation :

Résoudre une Équation du second degré

Note : /5

Corrections :

(Correction)

Corrigé de l'exercice 1

1) $25x^2 + 40x + 16$

2) $9x^2 - 24x + 16$

Corrigé de l'exercice 2

1) $-2x^2 + 32$

Corrigé de l'exercice 3

1) $3x^2 + 34x + 40$

2) $-25x^2 + 24x + 7$

Corrigé de l'exercice 4

1) $3x^2 - 24x + 55$

2) -$x^2 + 4x - 9$

Corrigé de l'exercice 5

1) $A = x(x - 9)$

2) $B = x(-3x^2 + 4x - 5)$

3) $C = (2x - 5)(-x - 4)$

Corrigé de l'exercice 6

1) $A = (x - 3)(x + 3)$

2) $B = (x - 9)(x - 1)$

3) Pas factorisable

4) $D = -2x(2 - 2x) = 4x(x - 1)$

Corrigé de l'exercice 7

1) Développez $(2x + 6)(x - 5)$.

2) Développez $f(x) = (2x + 2)(x - 3) - 24$.

Corrigé de l'exercice 8

$6x - 6 = -4x - 3$

On ajoute $4x$ aux deux membres.

$6x - 6 \mathbf{+4x} = -4x + -3 \mathbf{+4x}$

$10x - 6 = -3$

On ajoute 6 aux deux membres.

$10x - 6 \mathbf{+6} = -3 \mathbf{+6}$

$10x = 3$

On divise les deux membres par 10.

$10x \div \mathbf{10} = 3 \div \mathbf{10}$

$x = \dfrac{3}{10}$

La solution est $\dfrac{3}{10}$.

Corrigé de l'exercice 9

$\dfrac{2}{7} = \dfrac{8}{r}$

Les produits en croix sont égaux.

$2 \times r = 7 \times 8$

On divise les deux membres par 2.

$\dfrac{2 \times r}{2} = \dfrac{7 \times 8}{2}$

On simplifie et on calcule.

$r = 28$

Corrigé de l'exercice 10

1) $S = \{-3; 3\}$

2) $x^2 = 3$ équivaut à $x = \sqrt{3}$ ou $x = -\sqrt{3}$.
Les solutions sont donc $x_1 = \sqrt{3}$ et $x_2 = -\sqrt{3}$.
Il est équivalent de résoudre $x^2 - 3 = 0$, c'est-à-dire $x^2 - (\sqrt{3})^2 = 0$.
Soit $(x - \sqrt{3})(x + \sqrt{3}) = 0$ qui donne les deux solutions ci-dessus.

3) $S = \emptyset$

4) $S = \{-\sqrt{2}; \sqrt{2}\}$

Corrigé de l'exercice 11

1) $S=\{0;5\}$

2) $S=\{-6;6\}$

3) $S=\{-1\}$

4) $S=\left\{\dfrac{3}{2}\right\}$

Corrigé de l'exercice 12

1) $(9x+2)(x+6)-(9x+2)(-9x+5)=0$

On observe que $(9x+2)$ est un facteur commun dans les deux termes :

$$\begin{aligned}
&\underline{(9x+2)}(x+6)-\underline{(9x+2)}(-9x+5)=0\\
\iff\ &\underline{(9x+2)}\Big((x+6)-(-9x+5)\Big)=0\\
\iff\ &(9x+2)(x+6+9x-5)=0\\
\iff\ &(9x+2)(10x+1)=0
\end{aligned}$$

On reconnaît une équation produit-nul, donc on applique la propriété :

Un produit est nul si et seulement si au moins un de ses facteurs est nul.

$\iff 9x+2=0 \quad \text{ou bien} \quad 10x+1=0$

$\iff x=-\dfrac{2}{9} \quad \text{ou} \quad x=-\dfrac{1}{10}$

On en déduit : $S=\left\{-\dfrac{2}{9};-\dfrac{1}{10}\right\}$

2) Deux nombres sont égaux si et seulement si leur différence est nulle.

$$\begin{aligned}
&(7x-2)(8x-5)=(7x-2)(-7x+1)\\
\iff\ &(7x-2)(8x-5)-(7x-2)(-7x+1)=0
\end{aligned}$$

On observe que $(7x-2)$ est un facteur commun dans les deux termes :

$$\begin{aligned}
&\underline{(7x-2)}(8x-5)-\underline{(7x-2)}(-7x+1)=0\\
\iff\ &\underline{(7x-2)}\Big((8x-5)-(-7x+1)\Big)=0\\
\iff\ &(7x-2)(8x-5+7x-1)=0\\
\iff\ &(7x-2)(15x-6)=0
\end{aligned}$$

On reconnaît une équation produit-nul, donc on applique la propriété :

Un produit est nul si et seulement si au moins un de ses facteurs est nul.

$(7x-2)(15x-6)=0$

$\iff 7x-2=0 \text{ ou } 15x-6=0$

$\iff 7x=2 \text{ ou } 15x=6$

$\iff x=\dfrac{2}{7} \text{ ou } x=\dfrac{6}{15}$

On en déduit : $S=\left\{\dfrac{2}{7};\dfrac{2}{5}\right\}$

Corrigé de l'exercice 13

On reconnaît l'identité remarquable a^2-b^2 :

$$\begin{aligned}
&(2x-3)^2-4=0\\
\iff\ &((2x-3))^2-2^2=0\\
\iff\ &((2x-3)-2)\,((2x-3)+2)=0\\
\iff\ &(2x-5)\,(2x-1)=0
\end{aligned}$$

Propriété du produit nul

$S=\{\frac{1}{2};\frac{5}{2}\}$

Corrigé de l'exercice 14

$$\begin{aligned} & f(x) = 1 \\ \iff & 4x^2 - 7x + 1 = 1 \\ \iff & 4x^2 - 7x = 0 \\ \iff & x(4x-7) = 0 \\ & \text{Propriété du produit nul} \\ & S = \{0; \frac{7}{4}\} \end{aligned}$$

Corrigé de l'exercice 15

1) $S = \left\{\frac{2}{3}\right\}$

2) $S = \{-1-\sqrt{7}; -1+\sqrt{7}\}$

3) $S = \{0; 3\}$

4) $S = \{3-\sqrt{5}; 3+\sqrt{5}\}$

Corrigé de l'exercice 16

On reconnaît l'identité remarquable $a^2 - b^2$:

$$\begin{aligned} & 49(x-5)^2 - 4 = 0 \\ \iff & (7(x-5))^2 - 2^2 = 0 \\ \iff & (7(x-5)-2)(7(x-5)+2) = 0 \\ \iff & (7x-35-2)(7x-35+2) = 0 \\ \iff & (7x-37)(7x-33) = 0 \\ & \text{Propriété du produit nul} \\ & S = \{\frac{33}{7}; \frac{37}{7}\} \end{aligned}$$

Corrigé de l'exercice 17

Il suffit de développer !!

Corrigé de l'exercice 18

$(x+3)^2 = x^2 + 6x + 9$
$f(x) = x^2 + 6x + 4 = \underline{x^2 + 6x + 9} - 5 = (x+3)^2 - 5$
$\beta = -5$

Corrigé de l'exercice 19

$$f(x) = (x-5)^2 - 16$$

$\alpha = 5$ (Attention au signe !!) et $\beta = -16$.

Corrigé de l'exercice 20

$f(x) = 4(x+3)^2 + 60$ $a = 4$ et $\beta = 60$.

Corrigé de l'exercice 21

$f(x) = -3(x-2)^2 + 17$
$\alpha = 2$ (Attention au signe !!) et $\beta = 17$.

Corrigé de l'exercice 22

$f(x) = 4x^2 + 40x + 96 = 4(x^2 + 10x + 24)$
$(x+5)^2 = x^2 + 10x + 25$

donc

$$\begin{aligned} f(x) &= 4(x^2+10x+24) \\ &= 4(x^2+10x+25-1) \\ &= 4((x+5)^2-1) \\ &= 4(x+5)^2-4 \\ \beta &= -4 \end{aligned}$$

Corrigé de l'exercice 23

$f(x) = 4(x-1)^2+5$

Corrigé de l'exercice 24

1) On sait que si le polynôme, sous forme développée, s'écrit $P(x) = ax^2+bx+c$, alors sa forme canonique est de la forme $P(x) = a(x-\alpha)^2+\beta$,
avec $\alpha = \dfrac{-b}{2a}$ et $\beta = P(\alpha)$.
Avec l'énoncé : $a = -4$ et $b = 8$, on en déduit que $\alpha = 1$.
On calcule alors $\beta = P(1)$, et on obtient au final que $\beta = -5$.
d'où, $P(x) = -4(x-1)^2 + (-5)$
Au final, $P(x) = -4(x-1)^2-5$

2) On sait que si le polynôme, sous forme développée, s'écrit $P(x) = ax^2+bx+c$, alors sa forme canonique est de la forme $P(x) = a(x-\alpha)^2+\beta$,
avec $\alpha = \dfrac{-b}{2a}$ et $\beta = P(\alpha)$.
Avec l'énoncé : $a = 1$ et $b = -8$, on en déduit que $\alpha = 4$.
On calcule alors $\beta = P(4)$, et on obtient au final que $\beta = 4$.
d'où, $P(x) = 1(x-4)^2+4$
Au final, $P(x) = (x-4)^2+4$

Corrigé de l'exercice 25

1) On sait que si le polynôme, sous forme développée, s'écrit $P(x) = ax^2+bx+c$,alors sa forme canonique est de la forme $P(x) = a(x-\alpha)^2+\beta$,
avec $\alpha = \dfrac{-b}{2a}$ et $\beta = P(\alpha)$.
Avec l'énoncé : $a = -1$ et $b = -8$, on en déduit que $\alpha = -4$.
On calcule alors $\beta = P(-4)$, et on obtient au final que $\beta = 3$.
d'où, $P(x) = -1(x-(-4))^2+3$
Au final, $P(x) = -(x+4)^2+3$

2) On sait que si le polynôme, sous forme développée, s'écrit $P(x) = ax^2+bx+c$,alors sa forme canonique est de la forme $P(x) = a(x-\alpha)^2+\beta$,
avec $\alpha = \dfrac{-b}{2a}$ et $\beta = P(\alpha)$.
Avec l'énoncé : $a = -4$ et $b = 24$, on en déduit que $\alpha = 3$.
On calcule alors $\beta = P(3)$, et on obtient au final que $\beta = 1$.
d'où, $P(x) = -4(x-3)^2+1$
Au final, $P(x) = -4(x-3)^2+1$

Corrigé de l'exercice 26

1) On veut résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $3x^2+4x+3 = 0 \quad (1)$.
On reconnaît une équation du second degré sous la forme $ax^2+bx+c = 0$.
La consigne nous amène à commencer par écrire le polynôme du second degré sous forme canonique,
c'est à dire sous la forme : $a(x-\alpha)^2+\beta$,
On commence par diviser les deux membres de l'égalité par le coefficient a qui vaut ici 3.
$(1) \iff \quad x^2+\dfrac{4}{3}x+1 = 0$
On reconnaît le début d'une identité remarquable :
$\left(x+\dfrac{2}{3}\right)^2 = x^2+\dfrac{4}{3}x+\dfrac{4}{9}$
On en déduit que : $x^2+\dfrac{4}{3}x = \left(x+\dfrac{2}{3}\right)^2 - \dfrac{4}{9}$
Il vient alors :

$$\begin{aligned} & x^2+\frac{4}{3}x+1 = 0 \\ \iff \quad & \left(x+\frac{2}{3}\right)^2 - \frac{4}{9}+1 = 0 \end{aligned}$$

$\Longleftrightarrow \quad \left(x+\dfrac{2}{3}\right)^2+\dfrac{5}{9}=0$

L'équation revient à ajouter deux nombres positifs, dont un non-nul. Cette somme ne peut pas être égale à zéro.

On en déduit que $S=\emptyset$

2) On veut résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $-4x^2-2x+1=0 \quad (1)$.

On reconnaît une équation du second degré sous la forme $ax^2+bx+c=0$.

La consigne nous amène à commencer par écrire le polynôme du second degré sous forme canonique, c'est à dire sous la forme : $a(x-\alpha)^2+\beta$,

On commence par diviser les deux membres de l'égalité par le coefficient a qui vaut ici -4.

$(1) \iff \quad x^2+\dfrac{1}{2}x-\dfrac{1}{4}=0$

On reconnaît le début d'une identité remarquable :

$\left(x+\dfrac{1}{4}\right)^2=x^2+\dfrac{1}{2}x+\dfrac{1}{16}$

On en déduit que : $x^2+\dfrac{1}{2}x=\left(x+\dfrac{1}{4}\right)^2-\dfrac{1}{16}$

Il vient alors :

$$\begin{aligned} & x^2+\frac{1}{2}x-\frac{1}{4}=0 \\ \Longleftrightarrow \quad & \left(x+\frac{1}{4}\right)^2-\frac{1}{16}-\frac{1}{4}=0 \\ \Longleftrightarrow \quad & \left(x+\frac{1}{4}\right)^2-\frac{5}{16}=0 \end{aligned}$$

On reconnaît l'identité remarquable a^2-b^2 :

avec $a=\left(x+\dfrac{1}{4}\right)$ et $b=\sqrt{\dfrac{5}{16}}=\sqrt{\dfrac{5}{4^2}}=\dfrac{\sqrt{5}}{4}$

L'équation à résoudre est équivalente à :

$\left(x+\dfrac{1}{4}-\dfrac{\sqrt{5}}{4}\right)\left(x+\dfrac{1}{4}+\dfrac{\sqrt{5}}{4}\right)=0$

$\left(x+\dfrac{1-\sqrt{5}}{4}\right)\left(x+\dfrac{1+\sqrt{5}}{4}\right)=0$

On applique la propriété du produit nul :

Soit $x+\dfrac{1-\sqrt{5}}{4}=0$, soit $x+\dfrac{1+\sqrt{5}}{4}=0$

Soit $x=\dfrac{\sqrt{5}-1}{4}$, soit $x=\dfrac{-1-\sqrt{5}}{4}$

$S=\left\{\dfrac{-1-\sqrt{5}}{4};\dfrac{\sqrt{5}-1}{4}\right\}$

3) On veut résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $-x^2+5x+3=0 \quad (1)$.

On reconnaît une équation du second degré sous la forme $ax^2+bx+c=0$.

La consigne nous amène à commencer par écrire le polynôme du second degré sous forme canonique, c'est à dire sous la forme : $a(x-\alpha)^2+\beta$,

On commence par diviser les deux membres de l'égalité par le coefficient a qui vaut ici -1.

$(1) \iff \quad x^2-5x-3=0$

On reconnaît le début d'une identité remarquable :

$\left(x-\dfrac{5}{2}\right)^2=x^2-5x+\dfrac{25}{4}$

On en déduit que : $x^2-5x=\left(x-\dfrac{5}{2}\right)^2-\dfrac{25}{4}$

Il vient alors :

$$\begin{aligned} & x^2-5x-3=0 \\ \Longleftrightarrow \quad & \left(x-\frac{5}{2}\right)^2-\frac{25}{4}-3=0 \\ \Longleftrightarrow \quad & \left(x-\frac{5}{2}\right)^2-\frac{37}{4}=0 \end{aligned}$$

On reconnaît l'identité remarquable $a^2 - b^2$:
avec $a = \left(x - \frac{5}{2}\right)$ et $b = \sqrt{\frac{37}{4}} = \sqrt{\frac{37}{2^2}} = \frac{\sqrt{37}}{2}$
L'équation à résoudre est équivalente à :
$\left(x - \frac{5}{2} - \frac{\sqrt{37}}{2}\right)\left(x - \frac{5}{2} + \frac{\sqrt{37}}{2}\right) = 0$
$\left(x - \frac{5+\sqrt{37}}{2}\right)\left(x - \frac{5-\sqrt{37}}{2}\right) = 0$
On applique la propriété du produit nul :
Soit $x - \frac{5+\sqrt{37}}{2} = 0$, soit $x - \frac{5-\sqrt{37}}{2} = 0$
Soit $x = \frac{5+\sqrt{37}}{2}$, soit $x = \frac{5-\sqrt{37}}{2}$
$S = \left\{\frac{5-\sqrt{37}}{2}; \frac{5+\sqrt{37}}{2}\right\}$

Corrigé de l'exercice 27

1) $\Delta = (-6)^2 - 4 \times (-1) \times (-8) = 4$
$\Delta > 0$ donc l'équation admet deux solutions : $x_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$ et $x_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$
$x_1 = \frac{6-\sqrt{4}}{-2} = -4$
$x_2 = \frac{6+\sqrt{4}}{-2} = -2$
L'ensemble des solutions de cette équation est : $\mathcal{S} = \{-4; -2\}$.

3) $\Delta = (-8)^2 - 4 \times 4 \times (-12) = 256$
$\Delta > 0$ donc l'équation admet deux solutions : $x_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$ et $x_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$
$x_1 = \frac{8-\sqrt{256}}{8} = -1$
$x_2 = \frac{8+\sqrt{256}}{8} = 3$
L'ensemble des solutions de cette équation est : $\mathcal{S} = \{-1; 3\}$.

2) $\Delta = 10^2 - 4 \times 5 \times 10 = -100$
$\Delta < 0$ donc l'équation n'admet pas de solution.
$\mathcal{S} = \emptyset$

Corrigé de l'exercice 29

1) On développe la forme factorisée :
$$\begin{aligned}(x+4)(x-2) &= x^2 - 2x + 4x - 8\\ &= x^2 + 2x - 8\\ &= f(x)\end{aligned}$$
On retrouve la forme développée, donc on en déduit que $f(x)$ peut s'écrire sous forme factorisée : $f(x) = (x+4)(x-2)$.

2) On développe la forme canonique :
$$\begin{aligned}(x+1)^2 - 9 &= (x^2 + 2x + 1) - 9\\ &= x^2 + 2x - 8\end{aligned}$$
On en déduit que $f(x)$ s'écrit sous forme canonique : $f(x) = (x+1)^2 - 9$.

3) **a.** En utilisant la forme canonique, cela revient à résoudre une équation avec un carré isolé.
$$\begin{aligned}f(x) = -9 &\iff (x+1)^2 - 9 = -9\\ &\iff (x+1)^2 = 0\\ &\iff x + 1 = 0\\ &\iff x = -1\end{aligned}$$
L'équation a une solution : -1.

b. En utilisant la forme factorisée, cela revient à résoudre une équation produit-nul.
$$\begin{aligned}f(x) = 0 &\iff (x+4)(x-2) = 0\\ &\iff x + 4 = 0 \quad \text{ou} \quad x - 2 = 0\\ &\iff x = -4 \quad \text{ou} \quad x = 2\end{aligned}$$
L'équation a deux solutions : -4 et 2.

c. • Pour déterminer $f(0)$, les calculs à partir de la forme développée sont plus rapides :
$f(0) = 0^2 + 2 \times 0 + 2 - 8 = -8$
• Pour déterminer $f(-4)$, les calculs à partir de la forme factorisée sont plus rapides :
$f(-4) = (-4+4)(-4-2) = \times 0 \times (-6) = 0$
• Pour déterminer $f(-1)$, les calculs à partir de la forme canonique sont plus rapides :
$f(-1) = (-1+1)^2 - 9 = 0 - 9 = -9$

d. On remarque que -8 est la constante de la forme développée.
En utilisant la forme développée, on obtient :

$$\begin{aligned} f(x) = -8 &\iff x^2 + 2x - 8 = -8 \\ &\iff x^2 + 2x = 0 \\ &\iff x\,(x+2) = 0 \\ &\iff x = 0 \quad \text{ou} \quad x + 2 = 0 \\ &\iff x = 0 \quad \text{ou} \quad x = -2 \end{aligned}$$

L'équation a deux solutions : 0 et -2.

Corrigé de l'exercice 30
Écrivons l'équation sous la forme $ax^2 + bx + c = 0$:
$x^2 - 2\,x - m - 2 = 0$
On a donc $a = 1$, $b = -2$ et $c = -m - 2$
Le discriminant vaut $\Delta = b^2 - 4 \times a \times c = 4 - 4(-m-2)$
Ou encore, sous forme développée : $\Delta = 4\,m + 12$
Cherchons la valeur de m qui annule cette expression du premier degré : $m = -3$
Δ est une droite croissante de coefficient directeur 4.
Conclusion :
- Si $m < -3$, l'équation n'a pas de solution réelle ;
- Si $m = -3$, l'équation a une unique solution réelle ;
- Si $m > -3$, l'équation a 2 solutions réelles ;

Corrigé de l'exercice 31
Corrigé en ligne.

Corrigé de l'exercice 32
Résolvons l'équation suivante dans $\mathbb{R}$:

$$5x^3 - 2x^2 + 5x = 0$$

Tout d'abord, nous remarquons que nous pouvons factoriser par x :

$$x(5x^2 - 2x + 5) = 0$$

Cette équation produit deux cas possibles :
1. $x = 0$
2. $5x^2 - 2x + 5 = 0$

Examinons maintenant la seconde équation :

$$5x^2 - 2x + 5 = 0$$

Le discriminant Δ de cette équation est donné par :

$$\Delta = b^2 - 4ac$$

où $a = 5$, $b = -2$, et $c = 5$. Calculons :

$$\Delta = (-2)^2 - 4 \times 5 \times 5 = 4 - 100 = -96$$

Puisque $\Delta < 0$, l'équation $5x^2 - 2x + 5 = 0$ n'a pas de solution réelle.
Ainsi, la seule solution réelle de l'équation originale est :

$$\boxed{x = 0}$$

Corrigé de l'exercice 33

Pour résoudre l'équation suivante dans $\mathbb{R}$:

$$(x^2 - 3x + 5)(4x^2 - 5x + 1) = 0$$

il faut résoudre séparément chacune des équations suivantes :

1. $x^2 - 3x + 5 = 0$
2. $4x^2 - 5x + 1 = 0$

1. Résolution de $x^2 - 3x + 5 = 0$

Le discriminant Δ_1 de cette équation est donné par :

$$\Delta_1 = b^2 - 4ac$$

où $a = 1$, $b = -3$, et $c = 5$. Calculons :

$$\Delta_1 = (-3)^2 - 4 \times 1 \times 5 = 9 - 20 = -11$$

Puisque $\Delta_1 < 0$, l'équation $x^2 - 3x + 5 = 0$ n'a pas de solution réelle.

2. Résolution de $4x^2 - 5x + 1 = 0$

Le discriminant Δ_2 de cette équation est donné par :

$$\Delta_2 = b^2 - 4ac$$

où $a = 4$, $b = -5$, et $c = 1$. Calculons :

$$\Delta_2 = (-5)^2 - 4 \times 4 \times 1 = 25 - 16 = 9$$

Puisque $\Delta_2 > 0$, l'équation $4x^2 - 5x + 1 = 0$ a deux solutions réelles données par :

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta_2}}{2a}$$

Cela donne les solutions :

$$x_1 = \frac{5+3}{8} = 1 \quad \text{et} \quad x_2 = \frac{5-3}{8} = \frac{1}{4}$$

Conclusion

L'équation initiale a donc deux solutions réelles :

$$x = 1 \quad \text{ou} \quad x = \frac{1}{4}$$

Corrigé de l'exercice 34

Le dénominateur $x^2 + 3$ ne peut pas être nul, car il est toujours positif pour tous les réels x. Donc, il n'y a pas de restriction sur le domaine de définition de cette équation.

Revenons à l'équation $\frac{2x}{x^2+3} = 1$:

Multiplions des deux côtés de l'équation par $x^2 + 3$ puisqu'il est non-nul, pour éliminer le dénominateur :

$$\begin{aligned} 2x &= x^2 + 3 \\ x^2 - 2x + 3 &= 0 \\ x^2 - 2x + 3 &= 0 \end{aligned}$$

Cette équation n'a pas de solutions réelles, car le discriminant $\Delta = (-2)^2 - 4 \times 1 \times 3 = 4 - 12 = -8$ est négatif ($\Delta < 0$).

Donc, l'équation $\frac{2x}{x^2+3} = 1$ n'a pas de solutions réelles dans $\mathbb{R}$.

Corrigé de l'exercice 35
Pour résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation

$$\frac{3}{x} - \frac{1}{2x-1} = 1$$

étudions d'abord le domaine de définition. Nous devons éviter les valeurs de x pour lesquelles le dénominateur devient nul. Ainsi, nous excluons les valeurs qui rendent x égal à zéro et celles qui rendent $2x-1$ égal à zéro.
1. Pour exclure les valeurs qui rendent x égal à zéro, nous avons $x \neq 0$.
2. Pour exclure les valeurs qui rendent $2x-1$ égal à zéro, nous avons $2x-1 \neq 0$, ce qui signifie $x \neq \frac{1}{2}$.
Ainsi, le domaine de définition de l'équation est $\mathbb{R} \setminus \{0, \frac{1}{2}\}$, c'est-à-dire tous les réels sauf zéro et $\frac{1}{2}$.
Maintenant, résolvons l'équation en plaçant toute l'expression au même dénominateur. Multiplions des deux côtés de l'équation par le dénominateur commun $2x(x-1)$ pour éliminer les fractions :

$$\begin{aligned}
\frac{3}{x} - \frac{1}{2x-1} &= 1 \\
\frac{3(2x-1)}{x(2x-1)} - \frac{x}{x(2x-1)} &= \frac{x(2x-1)}{x(2x-1)} \\
3(2x-1) - x &= x(2x-1) \\
5x - 3 - 2x^2 + x &= 0 \\
-2x^2 + 6x - 3 &= 0
\end{aligned}$$

Cette équation admet deux solutions, au final : $S = \left\{ \frac{3-\sqrt{3}}{2}; \frac{3+\sqrt{3}}{2} \right\}$

Corrigé de l'exercice 36
Pour résoudre l'équation du second degré $3x^4 + 5x^2 - 1 = 0$ dans $\mathbb{R}$, commençons par poser $y = x^2$.
L'équation devient alors :

$$3y^2 + 5y - 1 = 0$$

Calculons d'abord le discriminant Δ de cette équation du second degré :

$$\begin{aligned}
\Delta &= b^2 - 4ac \\
\Delta &= 5^2 - 4 \times 3 \times (-1) \\
\Delta &= 25 + 12 \\
\Delta &= 37
\end{aligned}$$

Maintenant, nous pouvons trouver les solutions y_1 et y_2 séparément :

$$\begin{aligned}
y_1 &= \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} \\
y_2 &= \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}
\end{aligned}$$

En substituant les valeurs appropriées :

$$\begin{aligned}
y_1 &= \frac{-5 + \sqrt{37}}{2 \times 3} \\
y_2 &= \frac{-5 - \sqrt{37}}{2 \times 3}
\end{aligned}$$

Ensuite, pour trouver les solutions de l'équation d'origine x, prenons la racine carrée des valeurs de y : Comme $y_2 < 0$, il est impossible de trouver des solutions à $x^2 = y_2$. Il reste à résoudre :

$$x_1 = \sqrt{y_1}$$
$$x_2 = -\sqrt{y_1}$$

Ainsi, les solutions réelles de l'équation $3x^4 + 5x^2 - 1 = 0$ dans $\mathbb{R}$ sont :

$$x_1 = \sqrt{\frac{-5+\sqrt{37}}{6}}$$
$$x_2 = -\sqrt{\frac{-5+\sqrt{37}}{6}}$$

Ce sont les deux solutions réelles de l'équation.

Corrigé de l'exercice 37

L'équation n'est définie que sur $D = \mathbb{R}_+$, pour que la racine carrée existe.
Commençons par poser $X = \sqrt{x}$. On a nécessairement $X \geqslant 0$
L'équation devient :

$$4X^2 - 3X - 1 = 0$$

Calculons d'abord le discriminant Δ de cette équation du second degré :

$$\Delta = b^2 - 4ac$$
$$\Delta = (-3)^2 - 4 \times 4 \times (-1)$$
$$\Delta = 9 + 16$$
$$\Delta = 25$$

$$X_1 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$$
$$X_2 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$$

En substituant les valeurs appropriées :

$$X_1 = \frac{-(-3)+\sqrt{25}}{2 \times 4}$$
$$X_2 = \frac{-(-3)-\sqrt{25}}{2 \times 4}$$

Simplifions ces expressions :

$$X_1 = \frac{3+5}{8}$$
$$X_2 = \frac{3-5}{8}$$

Donc, les solutions X_1 et X_2 sont respectivement :

$$X_1 = \frac{8}{8} = 1$$
$$X_2 = -\frac{2}{8} = -\frac{1}{4}$$

$X_2 < 0$ donc cette solution n'est pas acceptable.
Maintenant, rappelons que $X = \sqrt{x}$. Pour trouver les solutions, prenons le carré de ces valeurs :

$$x_1 = (X_1)^2 = 1^2 = 1$$

Donc, les solutions réelles de l'équation $4x - 3\sqrt{x} - 1 = 0$ dans $\mathbb{R}$ sont $x_1 = 1$

Corrigé de l'exercice 38

Pour déterminer une équation du second degré ayant 3 et 7 comme solutions, nous utilisons la forme de l'équation quadratique basée sur la somme S et le produit P des racines.

Forme de l'équation

Si les racines de l'équation sont 3 et 7, alors l'équation du second degré peut s'écrire sous la forme :

$$x^2 - Sx + P = 0$$

où :

- S est la somme des racines : $S = 3 + 7 = 10$,
- P est le produit des racines : $P = 3 \times 7 = 21$.

Équation finale

En substituant S et P dans l'équation, on obtient :

$$x^2 - 10x + 21 = 0$$

Ainsi, l'équation du second degré ayant 3 et 7 comme solutions est :

$$\boxed{x^2 - 10x + 21 = 0}$$

Corrigé de l'exercice 39

Appelons x et y les deux nombres cherchés.
et $S = x + y$ et $P = xy$ la somme et le produit des deux inconnues.
On sait que s'il existe des solutions, elle vérifient l'équation :

$$x^2 - Sx + P = 0$$
$$x^2 - 12x - 2 = 0$$

Nous pouvons commencer par calculer le discriminant, qui est donné par la formule :

$$\Delta = b^2 - 4ac$$

Dans notre cas, $a = 1$, $b = -12$ et $c = -2$, donc :

$$\Delta = (-12)^2 - 4(1)(-2)$$
$$\Delta = 144 + 8$$
$$\Delta = 152$$

L'équation admet deux solutions :

$x_1 = \dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$ et $x_2 = \dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$
Les deux solutions de l'équation du second degré sont $x = 6+\sqrt{38}$ et $x = 6-\sqrt{38}$.

Corrigé de l'exercice 40

Existe-t-il un rectangle d'aire 20 et de périmètre 8 ?
Soit x la longueur du rectangle et y sa largeur. Le périmètre d'un rectangle est donné par $P = 2(x+y)$ et l'aire par $A = xy$. Nous avons les équations suivantes :

$$\begin{aligned} P &= 2(x+y) \\ A &= xy \end{aligned}$$

Nous savons que le périmètre est égal à 8 et l'aire est égale à 20. Nous pouvons donc écrire le système d'équations suivant :

$$\begin{aligned} 2(x+y) &= 8 \\ xy &= 20 \end{aligned}$$

Divisons la première équation par 2 pour obtenir :

$$x + y = 4$$

Appelons $S = x+y$ et $P = xy$ la somme et le produit des deux inconnues.
On sait que s'il existe des solutions, elle vérifient l'équation :

$$x^2 - Sx + P = 0$$

$$x^2 - 4x + 20 = 0$$

$\Delta = 16 - 80 = -64 < 0$

Ce qui signifie qu'il n'existe pas de solution réelle pour x.
Par conséquent, il n'existe pas de rectangle d'aire 20 et de périmètre 8.